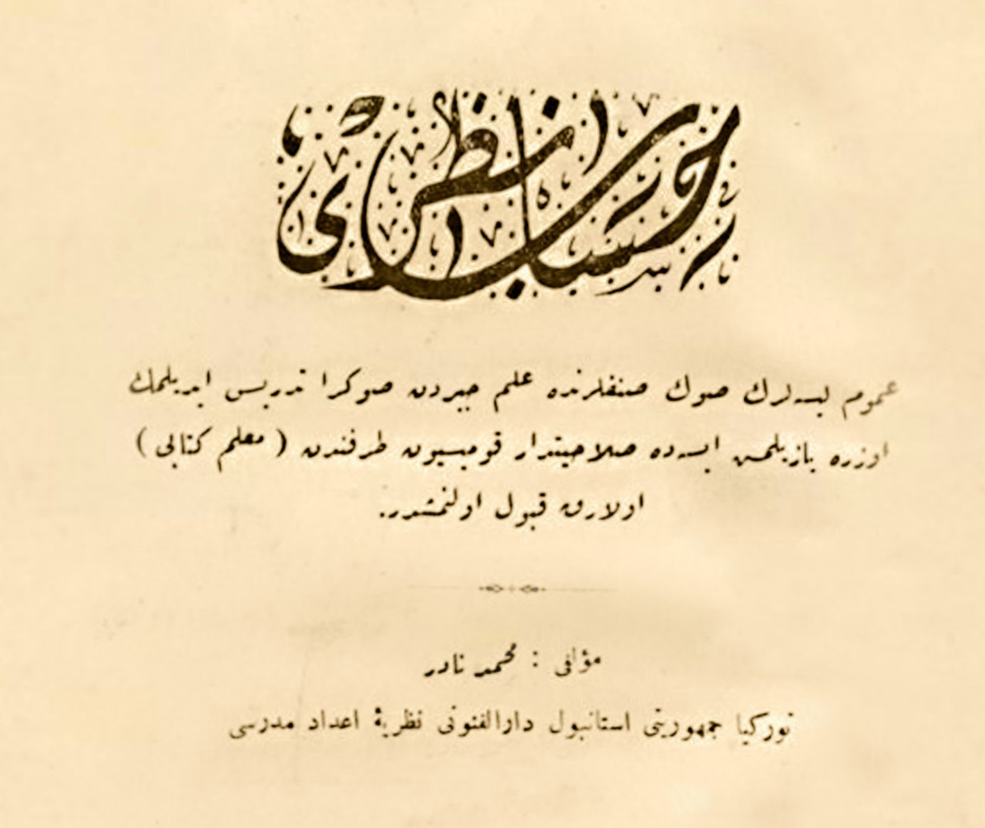
TÜBA
TÜRK-İSLÂM BİLİM KÜLTÜR MİRASI DİZİSİ: 32

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
CUMHURBAŞKANLIĞI
Himayelerinde


حساب نظری

عموم ليسه‌لرك صوك صنفلرنده علم جبردن صوكرا تدريس ايديلمك
اوزره يازيلمش ايسه ده صلاحيتدار قوميسيون طرفندن (معلم كتابي)
اولارق قبول اولنمشدر.

مؤلفی : محمد نادر
توركيا جمهوريتي استانبول دارالفنوني نظريهٔ اعداد مدرسي

TÜBA
TÜRKİYE BİLİMLER AKADEMİSİ

Hesâb-ı Nazarî

MEHMET NADİR

HAZIRLAYANLAR:
MELEK DOSAY GÖKDOĞAN - SAFİYE YILMAZ ERTEN

Hesâb-ı Nazarî

Mehmet Nadir

Hesâb-ı Nazarî
Mehmet Nadir

Türk-İslâm Bilim Kültür Mirası Dizisi: 32

Hazırlayanlar
Melek Dosay Gökdoğan (Prof. Dr.)
Safiye Yılmaz Erten (Dr.)

Editör
Mustafa Çiçekler (Prof. Dr.)

ISBN: 978-605-2249-63-5
Ankara, Kasım 2020

Tasarım ve Uygulama
Murat Acar

TÜBA Başkanı
Muzaffer Şeker (Prof. Dr.)

Proje Yayın Kurulu
Atilla Bir (Prof. Dr.)
Erhan Afyoncu (Prof. Dr.)
Hüseyin Sarıoğlu (Prof. Dr.)
M. Fatih Andı (Prof. Dr., Proje Yürütücüsü)
Muhittin Macit (Prof. Dr.)
Mustafa Çiçekler (Prof. Dr., Proje Yürütücüsü)
Mustafa Kaçar (Prof. Dr.)

Proje Yayın Koordinatörleri ve Danışmanları
Turgay Anar (Doç. Dr.)

Proje İdari İşler Sorumlusu
Duygu Erol

Baskı
TDV Yayın Matbaacılık Ticaret İşletmesi
Ostim OSB Mahallesi, 1256. Cadde No: 11
Yenimahalle / Ankara

TÜRKİYE BİLİMLER AKADEMİSİ
Piyade Sokak - No: 27 Çankaya - ANKARA
bilimklasikleri@tuba.gov.tr
0 312 442 29 03
www.tuba.gov.tr

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
CUMHURBAŞKANLIĞI
Himayelerinde

Hesâb-ı Nazarî

Mehmet Nadir

Hazırlayanlar
Melek Dosay Gökdoğan - Safiye Yılmaz Erten

TÜBA
TÜRKİYE BİLİMLER AKADEMİSİ

Büyük gelecekler, büyük geçmişlerin bilgi ve birikimi üzerine inşa edilir.

Türkiye, ihtişamlı bir medeniyetin ve zengin bir tarihin meydana getirmiş olduğu büyük bir birikimin varisidir. Kökleri bilime, bilgiye, hikmete ve irfana dayanan bu birikim, ülkemizin geleceğinin inşası gayretlerinde de en önemli referansımız olmalıdır. Bu büyük birikimden yararlanmadığımız takdirde, geçmişimizi "müzelik bir emtia"ya dönüştürürüz, sağlıklı bir gelecek inşa edemeyiz.

Zira tarih, sadece geçmişte olup biten değil, aynı zamanda bugüne kalan, yarına da aktarılacak olandır. Milletler tarihte yalnızca geçmişlerini değil, geleceklerini de ararlar. Geçmişiyle barışamayan, tarihini yorumlayamayan, ecdadına yabancılaşan milletler, sağlıklı bir gelecek inşa edemezler.

Çağımıza ve geleceğe yapacağımız etki bakımından, sahip olduğumuz zengin mirası yeniden ve daha güçlü biçimde harekete geçirmemiz gerekiyor. Türkiye Bilimler Akademisi tarafından yürütülen "Türk-İslâm Bilim ve Kültür Mirası Projesi"ni, işte bu amaca yönelik bir çalışma olarak değerlendiriyorum.

Proje kapsamında, sosyal bilimler, İslâmî ilimler, Türkiyat, sağlık ve tabiat bilimleri ve teknik bilimler alanlarında hazırlanan eserlerin, bilim ve kültür hayatımıza kazandırılmasını takdirle karşılıyorum.

Bu vesileyle, eserlerin müelliflerini rahmet ve şükrânla yâd ediyor, projenin hayata geçirilmesinde görev alan bilim adamlarımız ile TÜBA mensuplarını kutluyorum.

Recep Tayyip Erdoğan
T.C. Cumhurbaşkanı

Takdim

Sürdürülebilir kalkınma; "güçlü makroekonomik politikalar" ile "rekabeti odağına alan yapısal reformların" bir arada uygulanması ile mümkündür. Rekabette söz sahibi olabilmek ise; bilimsel ve teknolojik gelişmelerden en iyi şekilde faydalanmak, bu gelişmeleri içselleştirmek ve bir sonraki adımı da tasarlamakla mümkün oluyor. Bunu başarabilen ülkeler gelişmişlik konusunda rakiplerini geride bırakıyor ve küresel ekonomide daha fazla söz sahibi olmaya başlıyor.

Bilimsel ve teknolojik gelişme "yeni", "daha iyi" ve "keşfedilmemiş" olanı arama çabasıdır. Fakat bu çaba, geçmişten asla kopuk değildir. Geçmiş mirasın çok daha iyi anlaşılması, geleceğin daha sağlam inşası için bir zorunluluk olarak karşımıza çıkıyor. Türkiye tam da bu noktada, bulunduğu coğrafya ve sahip olduğu eşsiz tarihi ve kültürel birikimiyle ciddi bir karşılaştırmalı üstünlüğe sahiptir. Türk-İslâm medeniyetinin kadim bir üyesi olarak; insanlığın bilimsel, teknik ve kültürel gelişimine çok somut katkıları olan bir medeniyetin mirasçısıyız.

Türk-İslâm medeniyetine ait eserlerin gün ışığına çıkarılması; yeni kuşakların geçmişten feyz alarak daha güçlü bir motivasyonla yola devam etmesine katkı sağlayacaktır. Bu eserler ayrıca, bilim, Ar-Ge ve yenilikçilik konusundaki politikalarımız için de girdi sunarak, farklı bakış açılarından faydalanma imkanı verecektir. Bu kapsamda, Sayın Cumhurbaşkanımızın himayelerinde, Türkiye

Bilimler Akademisi (TÜBA) tarafından yürütülen "Türk-İslâm Bilim Kültür Mirası Projesi"ni çok değerli ve benzersiz bir adım olarak görüyorum. Proje; matematik, astronomi, tarih, coğrafya, edebiyat ve felsefe gibi alanlarda saygıdeğer İslâm âlimleri tarafından hazırlanan eserleri bilim dünyasına kazandırmayı amaçlıyor.

Yüksek himayeleri için Sayın Cumhurbaşkanımıza şükranlarımızı arz ediyorum. Başta TÜBA çalışanları olmak üzere, bu çok kıymetli proje için emeği geçen herkesi içtenlikle tebrik ediyorum. Eserlerin yazarlarını rahmet ve hayırla yâd ediyor, Projenin Milletimizin bilimsel ve topyekün kalkınması için yararlı olmasını diliyorum.

Mustafa Varank
T.C. Sanayi ve Teknoloji Bakanı

Sunuş

Ülkelerin bilimsel ilerlemesi ve yenilikçilik performansı, topyekûn kalkınma ile uluslararası rekabette üstünlük sağlama bakımından stratejik öneme sahiptir. Toplumların geleceğinin güvenle inşası ve refahın toplumun tüm katmanlarına yayılması bilimin, bilimsel düşünce ve yaklaşımların önemsenmesi ve yaygınlaştırılması, gençlerin bilim ve araştırma alanına yönlendirilmesi, bilimsel çalışma ve başarıların teşvik edilmesi ile mümkündür. Bu konular, dünyadaki bilim akademilerinde olduğu gibi milli akademimiz Türkiye Bilimler Akademisi'nin (TÜBA) amaç ve görevleri arasında yer almaktadır. Belirlenen hedeflere ulaşmak için sahip olduğumuz medeniyet birikimini iyi anlamak zorundayız.

Millet olarak, önemli bir bölümü gün ışığına çıkarılmayı ve değerlendirilmeyi bekleyen zengin bir bilim ve kültür mirasına sahip bulunuyoruz. Bu mirasın daha görünür ve yararlanılır kılınması, bugünkü ve gelecekteki bilimsel performansımız ve ulusal hedeflerimize ulaşmamız açısından büyük önem taşımaktadır. Tarihsel birikim ve mirasın ortaya çıkarılması ve değerlendirilmesi, diğer yararları yanında, bilimsel ilerleme ve yenilikçi çalışmalar için gerekli cesaret, özgüven ve motivasyona yapacağı katkı bakımından da büyük önem taşımaktadır.

Ülkelerin ekonomik gelişmişlik ve kalkınma yarışında son iki yüzyıldır devam eden göreli konumumuz ile geleceğe yönelik yüksek amaçlarımız dikkate alındığında, bireysel ve toplumsal düzeyde sağlıklı bir benlik/kimlik ve özgüven inşası ile güçlü bir ekosistem ve kültürün oluşturulmasına gerek olduğu ve bu konuda her Türk kurumunun katkı ve destek sağlamasının ulusal bir görev olduğu açıktır.

TÜBA Türk-İslâm Bilim Kültür Mirası Projesi, ülkemizin millî bilimler akademisi olma sorumluluğu ile Kalkınma Bakanlığı'nın mali desteğiyle 2014 yılında başlatılmıştır. Proje kapsamında Türk-İslâm medeniyeti havzasında, fen, mühendislik, Türkiyat, sosyal bilimler, dinî ilimler gibi alanlarda eski-farklı Türk lehçeleri ile diğer dillerde üretilmiş, uzman bilim insanlarımızca seçilen 100 eserin, imkân ve ihtiyaca göre transliterasyonu, tıpkıbasımı ve/veya tercümesi yapılarak yayımlanması yoluyla bilim ve kültür âleminin ve gelecek kuşakların istifadesine sunulması hedefi doğrultusunda yayınlarımız devam etmektedir.

TÜBA Türk-İslâm Bilim Kültür Mirası Projemiz, çok sayıda paydaşın doğrudan ve dolaylı katkı ve desteklerinin eseridir. Projemizin başlangıçtan beri Sayın Cumhurbaşkanımızca desteklenmesi ve 2018 yılı başından itibaren resmen Cumhurbaşkanlığı himayelerine alınmış olması, Akademimiz açısından büyük bir onur ve teşvik kaynağı olmuştur. Bilime ve projemize verdikleri çok değerli destek ve yüksek himayeleri için Sayın Cumhurbaşkanımız Recep Tayyip Erdoğan'a kalbî şükranlarımızı arz ediyorum.

Bugüne kıyasla oldukça kısıtlı koşullarda bilimsel mirasımızı oluşturan eserleri kaleme alan bilim ve kültür tarihimizin kahramanlarını rahmet ve şükranla yad ediyorum. Bu eserlerin çoğaltılması, saklanması ve bugüne ulaşmasında rol alan isimsiz kahramanları da saygıyla anıyorum.

Eserlerin transliterasyonu, tıpkıbasımı ve/veya tercümesi ve tahlilini yaparak günümüzün ve geleceğin okuyucu ve araştırmacılarına ulaşmasını sağlayan bilim insanlarımıza müteşekkiriz. Yayına hazırlık ve basım sürecinde rol alan Akademi üyelerimiz, bilim insanlarımız ve çalışanlarımız ile projeye katkı sağlayan tüm paydaşlarımıza da teşekkür ediyorum. Ayrıca, Türk-İslam Bilim Kültür Mirası Projesi'nin hayata geçirilmesinde katkılarından ötürü Prof. Dr. Ahmet Cevat Acar'a minnettarız.

TÜBA Türk-İslâm Bilim Kültür Mirası Projesi kapsamında yayımlanan eserlerin milletimizin bilimsel ilerlemesi ve topyekûn kalkınması ile medeniyet ihyası/inşası süreci bakımından yararlı olmasını diliyorum.

Prof. Dr. Muzaffer Şeker
TÜBA Başkanı

İçindekiler

Önsöz

Elinizdeki kitabı, Osmanlı Devletinin son dönem matematikçilerinden Mehmet Nadir'in (1856-1927) *Hesâb-ı Nazarî*[1] başlıklı kitabının Latin harflerine transliterasyonu oluşturmaktadır. Bu metnin Latin alfabeli Türkçede ilk defa yayınlanmasının önemini göstermek maksadıyla, yazardan ve eserin özelliklerinden bahsetmek gerekmektedir.

Mehmet Nadir'in yaşamıyla ilgili tafsilatlı bilgi veren Erdal İnönü'nün[2] bildirdiğine göre, Sakız'lı fakir bir ailenin çocuğu olarak dünyaya gelen Mehmet Nadir Bey, bir şekilde Anadolu'ya gelerek Bursa ve İstanbul'da eğitimini parlak bir öğrenci olarak tamamlamış ve akabinde Mekteb-i Bahriye'de ve Darüşşafaka'da matematik hocalığı görevlerine getirilmiştir. Darüşşafaka'daki hocalığının en ilginç tarafı, öğrencileri arasında Salih Zeki'nin bulunmasıdır. Buradaki öğrencilerin öğrenim düzeyini hiç beğenmemekle birlikte, sırf Salih Zeki'nin gelecek vaat eden parlak yeteneği onu bu görevi sürdürmeye ikna etmiştir. Hatta yüksek cebir dersinin sınavında Salih Zeki'nin sorulara verdiği cevaplar karşısında hayranlık duyarak, notunun çok kıt olmasına rağmen eli farkında olmadan sonsuz yazmıştır.

[1] Milli Matbaa, İstanbul 1926, 330 sayfa; Özege, II, 549.

[2] Erdal İnönü, *Mehmet Nadir, Bir Eğitim ve Bilim Öncüsü*, Tübitak Yayını, Ankara 1997.

1879-1880 yıllarının büyük kısmını yurt dışında geçirmiş, dönüşünde yurt dışına izinsiz gittiği için bir yıl hapis cezasıyla karşılaşmıştır. Bundan sonra artık devlet okullarında veya kurumlarında iş bulması mümkün olmamış, bu yüzden özel okullarda hocalık yaptıktan sonra, 1884 yılında İstanbul'da ilk özel lise olan Numune-i Terakki'yi açmıştır. *Tercüman-ı Hakikat* gazetesinde çıkan yazılarından, onun bu dönemde eğitim kuramları ve yöntemleri üzerine kafa yorduğu ve fikirler geliştirdiği anlaşılmaktadır. Ayrıca, İnci Enginün'ün[3] araştırmalarına göre, Shakespeare'den çeviriler yaparak yayınlamış, bu suretle edebiyat alanında da öncülük yapmıştır.

Mehmet Nadir'in Numune-i Terakki'deki görevi 1897 yılına kadar sürmüş, o tarihte İttihat ve Terakki Cemiyetinin İstanbul'daki üyelerinin hazırladıkları darbe girişiminin açığa çıkmasıyla görevinden alınmıştır. Bu cemiyetin üyesi olmakla beraber, darbe girişimini baskı altında kalınca ifşa ettiği bilinmektedir. Başka okullarda görev yaptıktan sonra 1903 yılında Halep Maarif Müdürlüğüne atanarak İstanbul'dan uzaklaştırılmıştı. Bu görevi beş yıl sürmüş, 1908'de İkinci Meşrutiyetin ilanıyla bu sefer İttihatçılar onu Trablusgarp'a sürmüşlerdir.

Trablusgarp'ı 1911'de İtalyanlar işgal edince, Mehmet Nadir İstanbul'a dönmüş, ancak orada kalamamış, Edirne'ye gönderilmiştir. 1912'de Balkan Savaşı sırasında Edirne Bulgarlar tarafından işgal edilince nihai olarak İstanbul'a dönmüştür. Ancak Osman Ergin'in[4] ifadesiyle "maişet kapıları da kendisine kapanmıştır". Maddi sıkıntı içinde geçen bu dönemde bazı öğrenci ve arkadaşları kendisine yardımcı olmak istemiş ve Darüşşafaka'da ve İnas Darülfünununda matematik hocalığı yapmasını sağlamışlar, nihayet 1919'da Salih Zeki Darülfünun'da kurduğu Sayılar Teorisi Kürsüsü'nün başına eski hocasını getirmiştir. Yaşamının sonuna kadar devam eden bu görevinin, onun gerçek

3 İnci Enginün, "Mehmet Nadir'in Shakespeare'den Yaptığı Tercümeler", *İstanbul Üniversitesi Edebiyat Fakültesi Türk Dili ve Edebiyatı Dergisi*(19), 81-188.

4 Osman Ergin, *Türk Maarif Tarihi*, Cilt 3-4, Eser Matbaası, İstanbul, 1977, s. 997-1013.

yeteneklerine uygun yegâne görev olduğu, tarihçilerin hemfikir olduğu bir kanaattir.[5]

Mehmet Nadir, yaşadığı döneme kadar ülkemizde yetişmiş, matematiğin sayılar teorisi alanında çalışmış neredeyse yegâne matematikçimizdir. Osmanlı Devletinin son zamanlarında matematik, genellikle askeri ve balistik alanlarında uygulanan konularıyla ilgi çekiyordu. Bu yüzden matematik araştırmaları çoğunlukla analiz, geometri ve cebir konularıyla sınırlıydı. Mehmet Nadir'in ise hemen bütün çalışmalarının bu pratik matematik konularının çok uzağında, kuramsal bir konu olan sayılar teorisi alanında olması, şimdiye kadarki Osmanlı bilim anlayışıyla ilgili değerlendirmelere uymamaktadır.

Vidinli Hüseyin Tevfik Paşa, Mehmet Nadir ve Salih Zeki, bildiğimiz kadarıyla, matematik yazıları uluslararası matematik dergilerinde yayınlanan ilk Türk matematikçileridir.[6] Mehmet Nadir'in yazılarının hepsi, *L'Intermédiaire des Mathématiciens* adlı Fransız dergisinde yayınlanmıştır. Diophant denklemlerini çözmeye çalışan bazı matematikçiler bu dergi aracılığıyla birbirleriyle haberleşiyorlardı. Mehmet Nadir de bu grup arasında yer almış ve Halep, Trablus, İstanbul ve Edirne'de bulunduğu sıralarda buralardan dergiye yazı göndererek grupla iletişimini sürdürmüş ve müşterek çalışmalar yapmıştır. Chicago Üniversitesi matematik profesörlerinden Leonard Eugene Dickson, "Sayılar Teorisinin Tarihi" adlı üç ciltlik ansiklopedik eserinin Diophant denklemlerinin yer aldığı ikinci cildinde Mehmet Nadir'e atıfta bulunmuştur.[7]

Fransız dergisinde ve Darülfünun Fen Fakültesi Mecmuasında yayınladığı makalelerinin yanı sıra, müstakil kitap olarak basılmış en önemli eseri, burada transliterasyonu verilmiş olan *Hesâb-ı Nazarî*'dir. Lise son sınıf öğrencileri için yazdığı bu kitabında

5 İnönü, s. 15.

6 İhsan Fazlıoğlu, "Mehmet Nadir", *TDV İslam Ansiklopedisi*, cilt 28, 2003, s. 499-500; Ekmeleddin İhsanoğlu, Ramazan Şeşen, Cevat İzgi, *Osmanlı Matematik Literatürü Tarihi*, II. Cilt, İstanbul 1999, s. 479-483.

7 L.E. Dickson, *The History of Theory of Numbers*, II, Chelsea Publishing Company, New York 1971, s. 544, 659.

Mehmet Nadir, kendi bulduğu bir bölünebilme algoritması ile sayılar teorisi alanına özgün katkıda bulunmuştur. Kitabın dördüncü bölümünde ayrıntılı olarak anlatılan bu algoritmayı Erdal İnönü sadeleştirerek yayınlamışsa da, Osmanlıca okuyamadığından kitabın tamamını inceleyememiştir. Bugüne kadar üzerinde hiçbir inceleme yapılmayan bu kitapta Mehmet Nadir Bey, başka orijinal çözümler de vermiştir. Meselâ Tamâm-ı Adedî usulünü ilk defa bölme işlemine uygulamıştır. Ayrıca A. Boutin'in *l'Intermédiaire des Mathématiciens* dergisine göndermiş olduğu ve yaklaşık 10 yıl boyunca çözümsüz kalan sorusu için yapmış olduğu çözüm de önemlidir.

Lise kitabı olarak hazırlanan bir çalışmanın özgün katkılar içermesi şaşırtıcı olmakla birlikte, Mehmet Nadir'in kitabın kapağında yer alan şu ifadesi: "Umum liselerin son sınıflarında ilm-i cebirden sonra tedris olunmak üzere yazılmış ise de salahiyetli komisyon tarafından muallim kitabı olarak kabul olunmuştur" zamanın yetkililerinin de bizim gibi düşünerek ders kitabını öğretmen kitabına dönüştürdüklerini göstermektedir. Bu eser Osmanlıdaki gerçek manada ilk müstakil sayılar teorisi kitabı olarak kabul edilebilir.

Hesâb-ı Nazarî incelendiğinde görülecektir ki Mehmet Nadir çağının tüm sayılar teorisiyle ilgili gelişmelerinden haberdar olup, günümüz modern sayılar teorisi kitaplarıyla aynı düzeyde bir çalışma kaleme almıştır.

Kendisi vefat ettiğinde, yerine atanacak bir sayılar teorisi hocası bulunmadığından, Darülfünun'daki Sayılar Teorisi Kürsüsü kapanmıştır. Eserlerinden Türk matematik tarihinin mümtaz bir mensubu olduğu anlaşılan Mehmet Nadir Bey'in *Hesâb-ı Nazarî* adlı sayılar teorisiyle ilgili kitabının Latin harfleriyle yayımlanması, onun tanınmasına ve matematik tarihinde hak ettiği yeri almasına hizmet edecektir.

Hesâb-ı Nazarî'yi Latin harflerine aktarırken şu hususları dikkate aldık:

Eser 1926 gibi geç bir tarihte yayımlanmış olduğundan, dili sadedir. Bu yüzden sadeleştirme yapmaya gerek kalmadığı gibi, transliterasyon kurallarına uyulmakla birlikte, günümüzde yaygın olarak kullanılan (malum, mesele gibi) sözcükler bu biçimleriyle muhafaza edilmiştir. Latin harflerine aktarırken referans olarak Ferit Devellioğlu'nun *Osmanlıca Türkçe Ansiklopedik Lugat*'ını, Sir James W. Redhouse'un *Turkish and English Lexicon*'unu[8] ve Talât Tuncer'in *Matematik Sözlüğü*'nü[9] kullandık. Okuyucuya kolaylık sağlaması maksadıyla, günümüzde yaygın olarak kullanılmayan Osmanlıca sözcükleri, özellikle terimleri/ıstılahları karşılıklarıyla birlikte kitabın sonuna eklediğimiz "Sözlük" bölümünde verdik. Kitapta karşılaşılan küçük yazım ve işlem hataları, belirtilmeden, transliterasyon metinde düzeltilerek yazılmıştır.

Melek Dosay Gökdoğan - Safiye Yılmaz Erten
Haziran 2017

[8] Çağrı Yayınları, İstanbul 1978.

[9] İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi, Prof. Dr. Nazım Terzioğlu Basım Atölyesi, İstanbul 1995.

Osmanlılarda Sayılar Teorisi ve Mehmet Nadir'in Hesâb-ı Nazarî Adlı Eserinin Konumu[1]

Sayılar teorisi, modern matematiğin alanlarından birisi olup, konuları daha önceleri aritmetik veya cebirin içinde yer almaktaydı. Sayılar teorisinin başlangıcı hemen hemen matematiğin başlangıcı ile aynı olmasına rağmen müstakil bir konu olarak ortaya çıkması 18. yy'dan itibaren gerçekleşmiştir. Osmanlı'da ise sayılar teorisi 19. ve 20. yy'larda gelişme gösterebilmiş modern matematik dallarından biri olmuştur.

Batı'da; Fermat (1601-1665), Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813), Legendre (1752-1833), Gauss (1777-1855), Dirichlet (1805-1859), G.H. Hardy (1877-1947) ve J.E. Littlewood (1885-1977) sayılar teorisine katkı sağlamış önemli isimlerdir. Batı'da ilk müstakil sayılar teorisi kitabı 1789'da Legendre tarafından kaleme alınmıştır. Osmanlı'da ise adında sayılar teorisi geçen ilk kitap Ahmet Şükrü'nün 1880 tarihli *Hesâb-ı Nazarî* kitabıdır. Batı'dan yaklaşık 100 yıl sonra kaleme alınmış olan bu eser, Osmanlı'da daha sonraki sayılar teorisi çalışmalarına öncülük etmiş olsa da, kitabın kendisinin müstakil bir sayılar teorisi kitabından çok bir aritmetik kitabı niteliğinde olduğunu belirtmek gerekir.

Bu çalışma için, Osmanlı'da sayılar teorisi alanında kaleme alınan eserleri

[1] Bu bölüm, Safiye Yılmaz Erten tarafından Ankara Üniversitesi'nde Prof. Dr. Melek Dosay Gökdoğan danışmanlığında hazırlanmış ve 13.11.2017 tarihinde savunulmuş olan "Osmanlılarda Sayılar Teorisi ve Mehmet Nadir" adlı doktora tezinden derlenerek yazılmıştır.

tespit etmek amacıyla, adında *hesâb* veya *a'dâd* kelimeleri ile birlikte *nazarî* kelimesinin geçtiği kitaplar taranmıştır. Cebir kitaplarının içinde yer alan sayılar teorisi konuları incelenmemiş, yalnızca müstakil kitap olarak yayınlanmış olan eserler dikkate alınmıştır. Bu şekilde 1880-1926 yılları arasında yayınlanmış 12 kitap tespit edilmiştir. Bu kitapların 2 tanesi tercüme, 10 tanesi telif eserdir. Kitap yazarlarının tamamına yakını, Osmanlı'da diğer bilim dallarında olduğu gibi, askeriye kökenlidir. Bu kitapları, kısaca inceleyelim:

Yukarda bahsedilen "Hesâb-ı Nazarî" adlı kitabın müellifi Ahmet Şükrü'dür. 267 sayfa olan kitap, 1297 (1880)'de İstanbul Mekteb-i Mülkiye Matbaası'nda taş baskı ile basılmıştır. Kitapta sırasıyla şu konular anlatılmıştır: sayıların yazılışı ve okunuşu, tam sayılarla toplama, çıkarma, çarpma, bölme, üs ve kök alma işlemleri, bölünebilme kuralları, en büyük ortak bölen, asal sayılar, asal çarpanlar, basit kesirler, ondalık kesirler, devirli ondalık kesirler ve bunlarla işlemler, uzunluk, alan, hacim, ağırlık ölçüleri, para birimleri, eski ve yeni ölçülerin karşılaştırılması, oran ve orantı, şirket, iskonto, senet problemleri, aritmetik ortalama. Kitap, ele alınan konular ve konuların sunuluş biçimi açısından bir sayılar teorisi kitabı değildir. Yalnızca bazı teoremler ve küçük ispatlar verilmiş, onun dışında kitap genellikle kurallar ve örnekler şeklinde ilerlemiştir.[2]

Bir diğer kitap, "Amelî ve Nazarî İlm-i Hesâb"ın müellifi Ahmet Şükrü'dür. 331 sayfa olan kitap, 1304 (1887)'de İstanbul Mahmut Bey Matbaasında basılmıştır. Kitaba temel kavramlar ve tanımlar verilerek başlanmış, sonra konular şu sırayla anlatılmıştır: sayıların yazılışı ve okunuşu, tam sayılarla toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve bunların kullanıldığı problemler, kesirler, en büyük ortak bölen, asal sayılar, asal çarpanlar, kesirlerle dört işlem, ondalık kesirler ve dört işlem, devirli ondalık kesirler, uzunluk, alan, hacim, ağırlık ölçüleri, para birimleri, eski ve yeni ölçülerin karşılaştırılması, üs ve kök alma işlemleri, oran ve orantı, faiz, senet, iskonto, aritmetik ortalama, şirket ve karışım problemleri. Kitapta ele alınan konular hemen hemen Ahmet Şükrü'nün *Hesâb-ı Nazarî* adlı kitabıyla aynıdır ve genellikle temel ve basit düzeydedir. Fakat konular matematiksel açıdan gayet sistemli ve düzenli bir şekilde sunulmuştur. Modern matematik kitaplarında olduğu gibi tanım, teorem, ispat, aksiyom, örnek ve problemler özenle belirtilmiştir.[3]

[2] Ahmet Şükrü. (1297/1880). *Hesâb-ı Nazarî*. İstanbul: Mekteb-i Mülkiye Matbaası.

[3] Ahmet Şükrü. (1304/1887). *Amelî ve Nazarî İlm-i Hesâb*. İstanbul: Mahmut Bey Matbaası.

"Amelî ve Nazarî İlm-i Hesâb Tatbikatı" adlı diğer bir kitabın müellifi yine Ahmet Şükrü'dür. 220 sayfa olan kitap, 1305 (1888)'de İstanbul Cemal Efendi Matbaasında basılmıştır. Kitapta sırasıyla şu konular anlatılmıştır: üs ve kök alma işlemleri, irrasyonel sayılar, aritmetik ve geometrik diziler, logaritma, permütasyon ve kombinasyon, alan, hacim, öz kütle, kütle hesabı, yuvarlama ve yaklaşık değer, hesap cetveli ile işlemler, ticaret, inşaat, doğramacılık, muhasebe, bankacılık, evrak, senelik taksit ve faiz hesapları, olasılık. Konu anlatımlarının ardından "Mesail-i Umumiye" başlığı altında 301 soru verilmiştir. *Amelî ve Nazarî İlm-i Hesâb Tatbikatı,* diğer kitapta olduğu gibi tanım, teorem, ispat, kural ve örnekler sistematiğinde oluşturulmuştur. İlk kitapta eksik kalan üst düzey konulardan bir kısmı bu kitaba eklenmiş olmakla birlikte mukayeseler, modül, Diophantos denklemleri, lineer denklemler, ikinci dereceden denklemler gibi pek çok konu kitapta yer almamıştır. Buna karşılık sayılar teorisinin alanına girmeyen, hatta sadece uygulama veya pratikle ilgili birçok konuya uzunca yer verilmiştir. Bu nedenle kitabın adı *Amelî ve Nazarî İlm-i Hesâb Tatbikatı* olmasına rağmen kitabın tam anlamıyla müstakil bir sayılar teorisi kitabı olduğu söylenemez.[4]

"Amelî ve Nazarî Yeni Usul İlm-i Hesâb" adlı bir başka kitap, İngiliz matematik cemiyeti FIC tarafından yayınlanmış olup, Harbiye Mektebi Fünun-ı Askeriye ve Mülkiye İdâdîsi Riyaziye hocası Kolağası Mehmed Rüşdü Bey, Topçu Mektebi ve Mülkiye Mühendis Mektebi hendese-i resmiye ve halliye hocası Kurmay Yüzbaşı Şevki Bey ve Soğuk Çeşme ve Gülhane Askerî Rüştiyeleri hesâb hocası Süvari Kolağası Hüsnü Bey ile birlikte İngilizceden Türkçeye tercüme edilmiştir. 463 sayfa olan kitap, 1307 (1890) senesinde İstanbul Kasbar Matbaası'nda basılmıştır. Kitapta sırasıyla şu konular anlatılmıştır: sayıların yazılışı ve okunuşu, tam sayılarla toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve bunların kullanıldığı problemler, bölünebilme kuralları, en büyük ortak bölen, asal sayılar, asal çarpanlar, kesirler, kesirlerle dört işlem, ondalık kesirler ve dört işlem, devirli ondalık kesirler, üs ve kök alma işlemleri, tam sayıların, kesirlerin ve ondalık kesirlerin karekök ve küp kökleri, uzunluk, alan, hacim, ağırlık ölçüleri, para birimleri, eski ve yeni ölçülerin karşılaştırılması, oran ve orantı, faiz, iskonto, aritmetik ortalama, karışım problemleri. Kitapta ele alınan konular sayılar teorisi alanında en basit düzeydeki konulardır. Yine mukayeseler, modül, Diophantos denklemleri, lineer denklemler, ikinci dereceden denklemler gibi birçok konuya değinilmemiştir. Fakat ele alınan konular tanım,

[4] Ahmet Şükrü. (1305/1888). *Amelî ve Nazarî İlm-i Hesâb Tatbikatı*. İstanbul: Cemal Efendi Matbaası.

kural ve örneklerle sınırlı bırakılmamış, ilgili teoremler ispatlarıyla birlikte verilmiştir. Bu bakımdan kitabın adındaki nazarî ismi kitabın içeriğinde karşılık bulmaktadır. Fakat üst düzey konulardan bahsedilmediği için kitabın kapsamı yeterli değildir. Kitabın çeviri olmasından dolayı, dönemin diğer sayılar teorisi kitaplarında pek de rastlanmayan şekilde Batılı bilim adamlarının isimleri ve yöntemleri de anlatılmıştır. Bu bağlamda da kitap kapsam olarak yeterli olmasa bile Batı ile Osmanlı arasında sayılar teorisi alanındaki literatür birliğine hizmet etmesi açısından önemli bir eserdir.[5]

"Amelî ve Nazarî İlm'el-A'dâd" adlı diğer bir kitabın müellifi Yüzbaşı Ali Galip'tir. 120 sayfa olan kitap, 1313 (1897) senesinde İstanbul'da Mekteb-i Fünun-ı Harbiye-i Şahane Matbaası'nda basılmıştır. Kitapta sırasıyla şu konular işlenmiştir: sayıların yazılışı ve okunuşu, ondalık sayılar ve dört işlem, bölünebilme kuralları, asal sayılar, asal çarpanlar, en büyük ortak bölen ve en küçük ortak kat, basit kesirler ve dört işlem, üs ve kök alma işlemleri, karekök ve küp kök alma, uzunluk, alan, hacim, ağırlık ölçüleri, para birimleri, eski ve yeni ölçülerin karşılaştırılması, oran ve orantı, faiz. Çok basit düzeydeki konular iptidaî bir şekilde ele alınmıştır. Kitapta nazarî kelimesinin karşılığı olabilecek hemen hemen hiçbir şey olmadığı söylenebilir. Hiçbir konuda teoremlere yer verilmemiş, basit tanımlar, kurallar ve örnekler şeklinde ilerleyen bir konu anlatımı yapılmıştır. Kurallar verilirken genel geçer ifadeler değil sayısal örnekler kullanılmıştır. Her konudan sonra çok sayıda örnek verilmiş ve bu da kitaba genel olarak basit düzeyde uygulamalı bir aritmetik kitabı görüntüsü vermiştir.[6]

"Amelî ve Nazarî Hesâb-ı Mükemmel" adlı kitabın ise müellifi Yüzbaşı Ali Galip'tir. 229 sayfa olan kitap, 1316 (1900) senesinde İstanbul'da Mekteb-i Fünun-ı Harbiye-i Şahane Matbaası'nda basılmıştır. Kitapta sırasıyla şu konular işlenmiştir: sayma ve yazma, tam sayılarla, ondalık sayılarla ve kesirlerle toplama, çıkarma, çarpma, bölme işlemleri ve sağlamaları, devirli ondalık sayılar, üs ve karekök alma, uzunluk, alan, hacim, ağırlık, para ölçüleri ve bu ölçülerin Batı'dan alınan yeni karşılıkları, bölünebilme, asal sayılar, bölenler, oran ve orantı, faiz, iskonto, senet, sigorta, karışım problemleri, yarışmalarda sorulacak sorular. Kitap, genel olarak konu anlatımlı bir ortaokul ders kitabı

[5] Şevki, Hüsnü, Mehmet Rüştü. (1307/1890). *Amelî ve Nazarî Yeni Usul İlm-i Hesâb*. İstanbul: Kasbar Matbaası.

[6] Ali Galip. (1313/1897). *Amelî ve Nazarî İlm'el-A'dâd*. İstanbul: Mekteb-i Fünun-u Harbiye-i Şahane Matbaası.

düzeyindedir. Konu anlatımları, konularla ilgili örnekler ve ödevler şeklinde ilerlemektedir. Teoremler ve ispatlarına pek yer verilmemiş, ispat yapılmak istendiğinde ise genel geçer bir ispattan ziyade sayılarla müşahhas örnekler verilmesi tercih edilmiştir.[7]

"Nazarî ve Amelî Yeni Usul Mükemmel Hesâb" adlı başka bir kitabın müellifi İsmail Faik'tir. 668 sayfa olan kitap, 1320 (1904) senesinde İstanbul'da A. Artin Asaduryan Şirket-i Mürettibiye Matbaası'nda basılmıştır. İki kısımdan oluşan kitabın birinci kısmında; sayıların yazılışı ve okunuşu, Roma ve Fransız rakamları, tam sayılarla toplama, çıkarma, çarpma, bölme, asal sayılar, asal çarpanlar, sadeleştirme, en büyük ortak bölen, en küçük ortak kat, kesirler, kesirlerle dört işlem, ondalık kesirler ve dört işlem, uzunluk, alan, hacim, sıvı, ağırlık, zaman ölçüleri, para birimleri, eski ve yeni ölçülerin karşılaştırılması, coğrafyada uzaklık ve zaman hesapları anlatılmıştır. İkinci kısmında ise; yüzde, kâr ve zarar, faiz, iskonto, sigorta, oran ve orantı, şirket problemleri, aritmetik ve geometrik diziler, taksit, üs ve kök alma işlemleri, karekök, küp kök, dördüncü, beşinci, altıncı dereceden kökler, köklü ifadelerde dört işlem, karışım problemleri ve alan konuları ele alınmıştır. Konuların ele alınış şekli açısından basit hesap kitaplarından farkı tanım, tarif ve örneklerden sonra çıkarılan genel kuralların sayılardan bağımsız genel ifadelerle *kaide* adı altında verilmesidir. Fakat teoremlere ve ispatlarına yer verilmemiştir. Temel düzeydeki konular basit seviyede ele alınmıştır. Kitap, ele alınan konular bakımından da konu anlatımlı bir hesap kitabından pek farklı değildir.[8]

Bir diğer kitap "Nazarî ve Amelî Yeni Usul Mükemmel Hesâbın Miftâhı"nın müellifi İsmail Faik'tir. 99 sayfa olan kitap, 1324 (1908) senesinde İstanbul'da Matbaa-i Kütüphane-i Cihan'da basılmıştır. Kitapta hiçbir konu anlatımı yapılmamış, önceden yayınlanmış olan *Nazarî ve Amelî Yeni Usul Mükemmel Hesâb* kitabına ait bir uygulama ve cevap anahtarı olarak yazılmıştır.[9]

"Hesâb-ı Nazarî Mesaili" adlı kitabın ise müellifi Mülkiye Mühendis Mektebi ile Darüşşafaka Mektebi riyaziye muallimlerinden Mühendis Mustafa

[7] Ali Galip. (1316/1900). *Amelî ve Nazarî Hesâb-ı Mükemmel*. İstanbul: Mekteb-i Fünun-ı Harbiye-i Şahane Matbaası.

[8] İsmail Faik. (1320/1904). *Nazarî ve Amelî Yeni Usul Mükemmel Hesâb*. İstanbul: A. Artin Asaduryan Şirket-i Mürettibiye Matbaası.

[9] İsmail Faik. (1324/1908). *Nazarî ve Amelî Yeni Usul Mükemmel Hesâbın Miftâhı*. İstanbul: Matbaa-i Kütüphane-i Cihan.

Salim'dir. 96 sayfa olan kitap, 1323-1325 (1908) senelerinde İstanbul'da A. Artin Asaduryan Şirket-i Mürettibiye Matbaası'nda basılmıştır. Mustafa Salim kitabına 3 sayfadan oluşan bir mukaddime ile başlamıştır. Mukaddimenin ardından kitapta yer alan problemlerin çözülmesinde gerekli olacak ifadeler ve kurallar verileceği söylenerek 8 madde halinde açıklamalar yapılmıştır. Bu 8 maddede belli bir sıra gözetilmeden ve hangi konuya ait açıklama yapılacağı ayrıca belirtilmeden bölünebilme, iki terim toplamının karesi, iki kare farkı, ardışık sayıların toplamı gibi konular hakkında kurallar verilmiştir. Kuralların açıklanmasından sonra problemlerin çözülmesinde gereken bazı teoremler yine belli bir düzen gözetilmeden yazılmıştır. Değişik konulardan 11 teorem ispatları ile birlikte verilmiştir. Bu teoremler Wilson, Euler, Fermat teoremleri gibi sayılar teorisinin önemli konularını da içermektedir. Sayılar teorisinin temel konularından bazılarına kısaca değinilmiş, fakat daha çok üst düzey konular ele alınmıştır. Ancak kurallar ve teoremler verilirken düzenli bir sistem takip edilmemiştir. Bu kısmın, konuları tüm ayrıntısı ile ele almak ve okuyucuya öğretmek gayesiyle değil, problemleri çözmeden önce hatırlatıcı olması için yazıldığı fikri oluşmaktadır. Teoremlerin ardından 73 problem, çözümleri de yapılarak verilmiştir. Burada çözülen problemler Mustafa Salim'in mukaddimede vurguladığı üzere niceliksel problemlerden ziyade ispatı istenen meseleler şeklindedir.[10]

"Nazarî ve Amelî Yeni İlm-i Hesâb" adlı kitabın ise müellifi Hasib Bey'dir. 503 sayfa olan kitap 1331 (1915) senesinde İstanbul Necm-i İstikbal Matbaası'nda basılmıştır. Kitapta sırasıyla şu konular ele alınmıştır: sayıların yazılışı ve okunuşu, Roma rakamları, tam sayılarla toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve zihinden işlemler, sayıların kuvvetleri, bölünebilme kuralları, en büyük ortak bölen, asal sayılar, asal çarpanlar, en küçük ortak kat, kesirler, kesirlerle dört işlem, ondalık kesirler ve dört işlem, karekök, küp kök, tam sayıların, kesirlerin ve ondalık kesirlerin karekökleri, uzunluk, alan, hacim, ağırlık ölçüleri, para birimleri, eski ve yeni ölçülerin karşılaştırılması, oran ve orantı, faiz, iskonto, şirket ve karışım problemleri. Kitapta ele alınan konular basit düzeyde konulardır. Sayılar teorisinin üst düzey konularına değinilmemiş, fakat konular tanım, teorem ve ispatlara özen gösterilerek anlatılmıştır. Konuyla ilgili önemli teoremlerin hemen hepsi ispatlarıyla birlikte verilmiştir. Kitap içerik olarak

[10] Mustafa Salim. (1323-1325/1908). *Hesâb-ı Nazarî Mesaili*. İstanbul: A. Artin Asaduryan Şirket-i Mürettibiye Matbaası.

bir sayılar teorisi kitabını karşılamamakla beraber, konuların teorik olarak ele alınış biçimi *nazarî* ifadesini karşılamaktadır.[11]

Bir diğer kitap "Mücmel Hesâb-ı Nazarî" nin müellifi Mehmet Re'fet'tir. 127 sayfa olan kitap, 1332 (1916) senesinde İstanbul Necm-i İstikbal Matbaasında basılmıştır. Kitapta sırasıyla; sayıların yazılışı ve okunuşu, sayıların oluşumu (ve sayı tabanları), hesâb ilminde kullanılan işaretler, toplama, çıkarma, çarpma, bölme kuralları ve bunların zihinden veya bir arada yapılmasının yöntemleri, üs alma, kare ve küp alma, karekök, bölünebilme kuralları, toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin sağlaması, asal sayılar, bir sayıyı asal çarpanlarına ayırma, bir sayının bölenleri, en büyük ortak bölen, en küçük ortak kat, kesirler, payda eşitleme, kesirlerde toplama, çıkarma, çarpma, bölme, ondalık kesirler, ondalık kesirlerde toplama, çıkarma, çarpma, bölme, bir kesrin ondalığa ve ondalığın kesre dönüştürülmesi konuları anlatılmıştır. Konuların içeriği ve ele alınış biçimi incelendiğinde günümüz ortaokul düzeyinde olduğu görülmektedir. Sayılar teorisi alanına giren üst düzey konuların hemen hiçbiri kitapta yer almamaktadır. Konu başlıkları bakımından basit bir hesâb veya aritmetik kitabını anımsatan eseri bunlardan farklı kılan şey, sadece kurallar ve örneklerden oluşmayıp konularla ilgili teoremler ve ispatlarını da içeriyor olmasıdır.[12]

Mehmet Nadir'in *Hesâb-ı Nazarî* adlı kitabı ise 333 sayfadan ibarettir ve 1926'da İstanbul'da Milli Matbaada basılmıştır. Kitapta sırasıyla şu konular anlatılmıştır: sayıların yazılışı ve okunuşu, toplama, çıkarma, çarpma, bölme, tamâm-ı adedî usulü ile işlemler, bölünebilme kuralları, kendi bulduğu bölünebilme kuralı, bir sayının bölenleri, asal sayılar, üçgensel sayılar, mükemmel sayılar, dost sayılar, mukayeseler (kongrüanslar), sürekli kesirler, çok bilinmeyenli mukayeseler, Euler fonsiyonu, Fermat ve Euler Teoremi, kompleks (sanal) sayılar, Pell denklemi, Diophantos denklemleri, taban aritmetiği, kök hesabı, yaklaşık değer hesabı, uygulama soruları. Kitap, kısmen günümüzdeki lise seviyesinde olmakla beraber daha çok üniversitelerin "Elementer Sayılar Kuramı" dersine uygun bir düzeydedir. Kitapta genel olarak üst düzey sayılar teorisi konuları konu anlatımı, teoremler, ispatlar ve örnekler şeklinde sunulmuş, ilgili konular hakkında yazarın alana yapmış olduğu katkılar da konu anlatımlarının içerisinde verilmiştir.[13]

[11] Hasib. (1331/1915). *Nazarî ve Amelî Yeni İlm-i Hesâb.* İstanbul: Necm-i İstikbal Matbaası.

[12] Mehmet Re'fet. (1332/1916). *Mücmel Hesâb-ı Nazarî.* İstanbul: Necm-i İstikbal Matbaası.

[13] Mehmet Nadir. (1926). *Hesâb-ı Nazarî.* İstanbul: Milli Matbaa.

Mehmet Nadir, kitaba fihrist vermeden sadece mukaddime yazarak başlamıştır. Mukaddimede, matematiğin ve özellikle hesâb ilminin öneminden bahsetmiş, kitabın yazılış amacını ve usulünü açıklamıştır.

Mukaddimenin ardından "Birinci Fasıl" başlığı altında "Ta'dâd ve Terkîm Nazariyyesi" verilmiştir. Sayıların yazılmasına gelince, yalnızca onluk tabana göre değil herhangi bir tabana göre yazılma kaidesi verilmiştir. Genel olarak birinci fasılda, taban aritmetiği ele alınmıştır.

İkinci fasıl "Cem' ve Tarh" başlığı altında verilmiştir. Toplama ve çıkarmanın tanımı, genel kurallar ve örnekler, Nadir'in mukaddimede belirttiği üzere öğrenciler tarafından bilindiği düşünülerek, anlatılmadan geçilmiştir. Bu bölümde sadece tamâm-ı adedî usulü ile toplama ve çıkarmanın nasıl yapıldığı anlatılmıştır.

Üçüncü fasılda çarpma konusu ele alınmıştır. Önce çarpmanın tanımı yapılmış ardından "da'vâ-yı nazarî" başlığı ile 6 madde ve bir soru verilmiştir.

Dördüncü fasıl, bölme ve bölünebilme hakkındadır. Bölme ile ilgili tanım ve teoremlerden sonra, tamâm-ı adedî usulü ile bölme konusu ayrıntılı olarak ele alınmıştır. "Kabiliyyet-i Taksîm" başlığında ise bölünebilme konusuna geçmiş ve kendi bulduğu bölünebilme kuralını da bu bölümde örneklerle anlatmıştır.

Beşinci Fasıl, "Şeklî Adedler", "Bir Adedin Kâsımları", "A'dâd-ı Müsellesiye", "A'dâd-ı Mükemmele", "A'dâd-ı Mütehâbbe" ve "Müteâdiller" başlıklarını içermektedir. "Şeklî Adedler" başlığı altında; asal sayılar, asal olmayan sayılar, aralarında asal sayılar, en büyük ortak bölen ve bunların özellikleri ele alınmıştır. "Bir Adedin Kâsımları" başlığı altında; bir sayının bütün bölenlerinin bulunması, bölenlerinin sayısının bulunması, bölenlerinin toplamının bulunması ve bölenlerinin çarpımının bulunması konuları dört madde hâlinde anlatılmıştır. "A'dâd-ı Müsellesiye" başlığı altında üçgensel sayılar ve özellikleri, "A'dâd-ı Mükemmele" başlığı altında mükemmel sayılar, "A'dâd-ı Mütehâbbe" başlığı altında dost sayılar konuları ele alınmıştır. Sayılar ile ilgili kısımların ardından Nadir, "Müteâdiller" bahsini ele almıştır. Konu başlığının hemen altında yine Fransızca karşılığı "Congruences" bulunmaktadır. Bu başlıkta modüler aritmetiğin genel kuralları anlatılmıştır.

Altıncı Fasıl "Birinci Dereceden Müteâdiller" konusu hakkındadır. Bu fasılda, birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin genel hâlini ve bilinmeyen sayısının denklem sayısından fazla olduğu durumları ele almıştır.

Yedinci fasılda; sürekli kesirler, çok bilinmeyenli denklemlerin çözümü, Euler fonksiyonu, irrasyonel sayılar ve sanal sayılar, Diophantos problemleri, Planude meseleleri adıyla meşhur iki problem ve çözümü, Pell denklemleri gibi birçok farklı konuya yer verilmiştir. İlk bölümlerdeki başlıklamadan faklı olarak, ayrı bölümlerde ele alınabilecek konular tek bölümde alt başlıklar hâlinde ele alınmıştır.

Kitabın sonunda önceki bölümlerde ele alınan konulara eklemeler yapılan altı adet not verilerek kitap tamamlanmıştır.

İncelenen kitaplara genel olarak bakacak olursak, kitapların isimlerinde *sayılar teorisi* ifadesi bulunmasına rağmen, hemen hemen tamamının konu anlatımlı ortaokul matematik kitabı düzeyinde olduğu ve aritmetik konularından öteye geçemediği görülmüştür. Bu kitaplardan yalnızca iki tanesi; Mustafa Salim'in 1908 tarihli *Hesâb-ı Nazarî Mesaili* adlı kitabı ve Mehmet Nadir'in 1926 tarihli *Hesâb-ı Nazarî* isimli kitabı münhasıran sayılar teorisi üzerinedir. Her ne kadar *sayılar teorisi* başlıklı 12 kitap bulunmuş olsa da, tüm bu kitaplar incelendikten sonra –tespit edebildiğimiz kadarıyla– Osmanlı'da kaleme alınmış yalnızca iki sayılar teorisi kitabı olduğunu söylemek daha doğru olacaktır.

Mustafa Salim'in *Hesâb-ı Nazarî Mesaili* kitabı tamamen teorik olarak yazılmış, üst düzey sayılar teorisi konuları, teoremler ve ispatlarla anlatılmıştır. Fakat kitap bir el kitabı gibi hazırlandığından, sayılar teorisine ait tüm konuların sistematik bir şekilde anlatılması yerine önemli görülen teoremler ve kurallar belli bir düzen olmaksızın verilmiştir. Bu da pek çok sayılar teorisi konusunun eksik kalmasına sebep olmuştur. Yine de kitapta ele alınan konular, önceki sayılar teorisi kitaplarından farklı olarak, tamamen teorik ve üst düzey konulardır. Bu bağlamda Mustafa Salim'in *Hesâb-ı Nazarî Mesaili* kitabı, Osmanlı'da sayılar teorisi alanındaki modern bilgilere ilk kez rastlanması açısından oldukça önemlidir. Tespit edebildiğimiz kadarıyla, Osmanlı'ya modern sayılar teorisi kavramlarının girişini sağlayan kişi Mustafa Salim olmuştur. Mustafa Salim, sayılar teorisi alanında çalışan önemli Batılı matematikçilere atıf yapmış ve teoremlerine kitabında yer vermiştir. Fakat hangi kaynaklardan yararlandığına dair malumat vermemiştir.

Mehmet Nadir'in sayılar teorisi çalışmaları ise Osmanlı topraklarındaki çağdaşlarının çok ötesindedir. Nadir, kendi döneminin sayılar teorisi bilgisine vakıf, Batı'da yapılan çalışmalardan haberdar ve alana kendisi katkı yapabilecek düzeyde hâkimdir. Sayılar teorisinde yazılmış İngilizce ve Fransızca pek çok kitabı elinde bulundurduğunu ifade etmiş, yararlandığı kaynakları zaman zaman belirtmiş ve çoğunlukla Fransızca kaynaklara atıf yapmıştır. Osmanlı topraklarında ya da İslam dünyasında yaşamış sayılar teorisi alanında çalışmış hiçbir matematikçiden bahsetmemiştir. Osmanlı'da Mustafa Salim ile kısmen temeli atılmış olan sayılar teorisinin terminolojisi Mehmet Nadir ile tamamlanmıştır. Batı'dan aktarılan kavramların Fransızca ve Osmanlıca karşılıklarını birlikte vermiştir. Bu terimlerin büyük bir kısmının Osmanlı'da daha önceden de kullanımı mevcuttu. Yine de Nadir'in, terminolojinin doğru yerleşmesi için ayrıca çaba sarf ettiği görülmektedir.

Nadir'in 1926 yılında yayınlanmış olan *Hesâb-ı Nazarî* adlı kitabı, günümüzde bile Sayılar Teorisine Giriş derslerinde kullanılabilecek kadar kapsamlı ve modern bir sayılar teorisi kitabıdır. Kitapta, daha önce Darülfünun Fen Fakültesi Mecmuasında yayınlanan makalelerinden de bölümler bulunmaktadır. İçerdiği konular ve konuların ele alınış biçimi bakımından bu kitabın, Osmanlı topraklarında sayılar teorisi alanında bir örneğinin daha olmadığını açıkça belirtmeliyiz.

Nadir'in, bu kitabında, sayılar teorisi alanına orijinal katkıları bulunmaktadır. Tespit edebildiğimiz kadarıyla "tamâm-ı adedî" usulünün bölme işlemine uygulanması ilk defa Mehmet Nadir tarafından yapılmıştır. "Kabiliyyet-i Taksîm Hakkında Kâide-i Umûmî" başlığı ile duyurduğu kendi bulmuş olduğu bölünebilme kuralı ise alana yaptığı katkılarından en çok bilinenidir. Bu kural, herhangi bir sayı ile yapılan bölmede kalanın bulunması algoritmasıdır. Nadir'in alana önemli bir diğer katkısı da A. Boutin'in *L'Intermédiaire des Mathématiciens* dergisine gönderdiği ve 11 yıl boyunca çözümsüz kalan bir sorusuna bulmuş olduğu çözümdür. Uluslararası bir dergide bu kadar uzun süre yanıtsız kalan bir sorunun zorluğu ve önemi aşikârdır. Nadir'in çözümü ise çok zarif olup, onun alana vukufiyetinin bir ispatı niteliğindedir.

Osmanlı topraklarında sayılar teorisi ile ilgilenen kendisinden başka hemen hemen hiç kimse olmamasına rağmen, Mehmet Nadir, sayılar teorisi alanında çağını yakalamayı başarmıştır.

Kaynaklar

Ahmet Şükrü. (1297/1880). *Hesâb-ı Nazarî.* İstanbul: Mekteb-i Mülkiye Matbaası.

Ahmet Şükrü. (1304/1887). *Amelî ve Nazarî İlm-i Hesâb.* İstanbul: Mahmut Bey Matbaası.

Ahmet Şükrü. (1305/1888). *Amelî ve Nazarî İlm-i Hesâb Tatbikatı.* İstanbul: Cemal Efendi Matbaası.

Ali Galip. (1313/1897). *Amelî ve Nazarî İlm'el-A'dâd.* İstanbul: Mekteb-i Fünun-ı Harbiye-i Şahane Matbaası.

Ali Galip. (1316/1900). *Amelî ve Nazarî Hesâb-ı Mükemmel.* İstanbul: Mekteb-i Fünun-ı Harbiye-i Şahane Matbaası.

Devellioğlu, F. (2012). *Osmanlıca-Türkçe Ansiklopedik Lügat.* Ankara: Aydın Kitabevi.

Dickson, L.E. (1971). *History of the Theory of Numbers.* New York: Chelsea Publishing Company.

Enginün, İ. (1971). Mehmet Nadir'in Shakespeare'den Yaptığı Tercümeler. *İstanbul Üniversitesi Edebiyat Fakültesi Türk Dili ve Edebiyatı Dergisi*(19), 81-188.

Ergin, O. (1977). *Türk Maarif Tarihi* (Cilt 3-4). İstanbul: Eser Matbaası.

Fazlıoğlu, İ. (2003). *Mehmet Nadir.* TDV İslam Ansiklopedisi (Cilt 28).

Hasib. (1331/1915). *Nazarî ve Amelî Yeni İlm-i Hesâb.* İstanbul: Necm-i İstikbal Matbaası.

İhsanoğlu, E., Şeşen, R., & İzgi, C. (1999). *Osmanlı Matematik Literatürü Tarihi (OMLT).* İstanbul: IRCICA.

İnönü, E. (1997). *Mehmet Nadir: Bir Bilim ve Eğitim Öncüsü.* Ankara: TÜBİTAK Yayınları.

İsmail Faik. (1320/1904). *Nazarî ve Amelî Yeni Usul Mükemmel Hesâb.* İstanbul: A. Artin Asaduryan Şirket-i Mürettibiye Matbaası.

İsmail Faik. (1324/1908). *Nazarî ve Amelî Yeni Usul Mükemmel Hesâbın Miftâhı.* İstanbul: Matbaa-i Kütüphane-i Cihan.

Mehmet Nadir. (1926). *Hesâb-ı Nazarî.* İstanbul: Milli Matbaa.

Mehmet Re'fet. (1332/1916). *Mücmel Hesâb-ı Nazarî.* İstanbul: Necm-i İstikbal Matbaası.

Mustafa Salim. (1323-1325/1908). *Hesâb-ı Nazarî Mesaili.* İstanbul: A. Artin Asaduryan Şirket-i Mürettibiye Matbaası.

Sir James W. (1978). *Redhouse Turkish and English Lexicon,* İstanbul: Çağrı Yayınları.

Şevki, Hüsnü, & Mehmet Rüştü. (1307/1890). *Amelî ve Nazarî Yeni Usul İlm-i Hesâb.* İstanbul: Kasbar Matbaası.

Tuncer, T. (1995). *Matematik Sözlüğü.* İstanbul: İÜ Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi, Prof. Dr. Nazım Terzioğlu Basım Atölyesi.

Yılmaz Erten, S. (2017). *Osmanlılarda Sayılar Teorisi ve Mehmet Nadir*, Ankara Üniversitesi, Yayımlanmamış Doktora Tezi, Ankara.

Metin

Türkiye Cumhuriyeti
Maârif Vekâleti Neşriyatından

Hesâb-ı Nazarî

Umum liselerin son sınıflarında ilm-i cebirden sonra tedris edilmek üzere yazılmış ise de salâhiyetdâr komisyon tarafından "muallim kitabı" olarak kabul olunmuştur.

Müellifi:
Mehmet Nadir
Türkiye Cumhuriyeti İstanbul Darülfünunu
Nazariyye-i A'dâd Müderrisi

İstanbul - Milli Matbaa
1926

Mukaddime

Erbabı bilir ki, ulûm-ı riyâziyye, bütün ilimlerin temeli, esasıdır. "İlm-i hesâb" da, ulûm-ı riyâziyyenin miftâhıdır.

Ulûm-ı riyâziyyenin her bahsi, her meselesi, her da'vâ-yi nazarîsi hâiz-i ehemmiyettir. Ulûm-ı riyâziyyenin hiçbir bahsi abes değildir.

Fevâid-i maddiyeyi hâiz olmayan bahislerin bile zihne küşâyiş vermek, kuvve-i muhâkemeyi tezyid eylemek gibi manevî fâideleri pek çoktur.

"Ulûm-ı hakîkiyye" namını alan ulûm-ı riyâziyyede "lüks" gibi zâhirî âlâyiş yoktur.

İşte, bu ulûmun miftâhı olan "ilm-i hesâb"ın nazarî kısmını yazmayı deruhde ettik.

Bu kitap, liselerin son sınıflarında tedris edilmek üzere yazılmıştır. Bu sınıf şâkirdanı, "ilm-i hesâb"ın amelî kısmıyla cebr-i âdîyi de görmüş olduklarından, biz de bunların derece-i iktidârlarını nazar-ı dikkate alarak fazla ta'rifâttan, tafsîlâttan ictinâb eyledik. Yani "ilm-i hesâb"ın amelî kısımlarına ait basit maddeleri yazmaktan tevakkî ettik.

"Hesâb-ı nazarî"nin bir takım bahislerine pek ziyade yardımı olan "Müteâdiller-Congruences"in pek sathi, pek basit kısımlarını da bu kitaba derç etmeyi münasip addettik.

Hâsılı bu risale, lâyıkıyla, dikkatle tedris edilirse, "ilm-i a'dâd" hakkında oldukça iktisâb-ı ma'lûmât edileceği fikrindeyiz.

İhtâr: Bazı mesail veya da'vâ-yi nazarî var ki lise talebeleri için güç anlaşılır. Bu gibi maddelerin baş tarafına şöyle (*) bir yıldız işareti konmuştur. Bunlar tedris edilmemelidir.

Birinci Fasıl

Ta‘dâd ve Terkîm Nazariyyesi

1. Ta‘dâd ve terkîm usulünün ibtinâ’ ettiği esas, müstakildir. Yani, kaide “10” adedi ittihaz olunduğu gibi, herhangi bir “B” adedi olursa olsun, kaide ittihaz olunup kaide “10” hakkında câri olan bi’l-cümle kavâid-i esâsiyye, bu “B” kaidesine göre de aynen tatbik olunur.

Kaide “B” alınırsa, “$B-1$” kadar erkâm-ı müş‘ire ile “0” sıfır da birlikte “B” kadar rakamın, rumuzun vücuduna lüzum vardır.

(n) rakamlı bir adedi N ile ve bunun en yüksek mertebesinden bed’ ile sırasıyla bütün mertebelerini işgal eden rakamları da:

$$a, b, c, d, \dots, f, u$$

ile gösterilirse bu N adedinin şekl-i esâsîsi ve umûmîsi şudur:

$$\mathrm{N} = \mathrm{a.B^{n-1}} + \mathrm{b.B^{n-2}} + \mathrm{c.B^{n-3}} + \mathrm{d.B^{n-4}} \dots \mathrm{f.B} + \mathrm{u}$$

Mesela, kaide (10) olduğuna göre yazılmış 689201 adedinin şekl-i esâsîsi şudur:

$$\begin{aligned} &6.10^5 + 8.10^4 + 9.10^3 + 2.10^2 + 0.10 + 1 \\ &\quad = 600000 + 80000 + 9000 + 200 + 0 + 1 \\ &\quad = 689201 \end{aligned}$$

Tembih: İhtisara riayeten, bir adedin hangi kaideye göre yazılmış olduğunu göstermek için o adedin âhâd mertebesi rakamının altına ve gayet ufak olmak şartıyla kaidenin rakamı yazılır. Mesela,

$$7865_{10} = 4675_{12} \dots (g)$$

münasebetini şöylece okuyacağız:

"Kaide (10) olduğuna göre yazılmış 7865 adedi, kaide (12) olduğuna göre yazılmış 4675 adedine müsâvîdir."

Şimdi yapacağımız tahvilde bunun hakiki olduğu meydana çıkacaktır.

Muhtelif Kaidelerle Yazılmış Adedlerin Yekdiğerine Tahvilleri

2. **Birinci Kaziyye:** Kaide (B) olarak yazılmış N_B adedinin, kaidesi (10) olan adede tahvili.

Yukarda görmüş idik ki, böyle bir adedin şekl-i esâsîsi şudur:

$$N_B = \mathrm{a.B^{n-1} + b.B^{n-2} + c.B^{n-3}} + \cdots + \mathrm{f.B + u}$$

Bu aded, "n" rakamlı bir adeddir.

İspata sühûlet vermek için adedi beş rakamlı farz edelim. Bu hâlde şu münasebet hâsıl olur:

$$N_B = \mathrm{a.B^4 + b.B^3 + c.B^2 + d.B + e}$$

Bunu böyle farz ettikten sonra şöyle muhakemeye girişiriz:

Mademki, herhangi bir mertebenin olursa olsun, bir vâhidi, kendinden ilk dûn mertebenin B vâhidine müsâvîdir.

Eğer beşinci mertebeyi işgal eden a adedi B ile darb edilir ve bu hâsıl-ı darba dördüncü mertebenin b adedi ilâve olunursa:

$aB + b$ mecmûu dördüncü mertebe âhâdini irâe eder.

Bu aded de yine B ile darb edilerek, hâsıl-ı darba c ilave olunursa, üçüncü mertebe âhâdi elde edilir. İşte bu minval üzere devam edilerek âhâd-i basîteye kadar gidilir. Bundan sonraki aded, aded-i matlûbdan ibarettir.

Bu kaziyyeden şu sûret-i umûmiyye istintaç edilir:

B kaidesine göre yazılmış bir adedi, kaidesi (10) olan adede tahvil etmek için şöylece yapmalıdır:

Verilmiş adedin sol taraftaki rakamını kaide B ile darb, hâsıl-ı darba ikinci rakam ilave olunur.

Bu aded de yine kaide B ile darb, hâsıl-ı darba üçüncü rakam zam olunur.

Ve bu minval üzere, âhâd mertebesini ilave edinceye kadar devam edilerek matlûb aded elde edilir.

Bir misalle tavzîh-i merâm edelim:

Kaidesi (12) olarak yazılmış olan $1237a$ [1] adedini, kaidesi (10) olan adede tahvil edelim:

$$\begin{aligned} 1.12 = 12; 12 + 2 = 14; 14.12 = 168; 168 + 3 = 171; 171.12 \\ = 2052; 2052 + 7 = 2059; 2059.12 \\ = 24708; 24708 + a = 24718 \end{aligned}$$

İşte böylece şu münasebeti elde etmiş oluruz:

$$1237a_{12} = 24718_{10}$$

Tembih: Kaide (B) olduğuna göre yazılmış bir adedi, kaide (10) olan adede tahvil etmek için veregeldiğimiz usulü daha vâzıh, daha

[1] Buradaki a adedi 10 adedine muadil olmak üzere isti'mâl edilmiştir.

mücmel bir surette göstermek için şu parantezli ifadeyi yazıyoruz: Şu: $abcde$ adedini:

$$\{[(aB + b)B + c]B + d\}B + e$$

suretle gösterirsek vehleten iş anlaşılmış olur.

3. İkinci Kaziyye: Kaidesi (10) olarak yazılmış bir N_{10} adedini, kaidesi (B) olan adede tahvil etmek matlûb.

Kaidesi (10) olarak yazılmış bir adedi, N_{10} ile gösterelim ve bunu kaidesi B olan adede tahvil etmek isteyelim.

Evvel-emirde, bu adedin rakamlarını (n) kadar farz ve bu rakamları, en yüksek mertebesinden bed' ile âhâd mertebesine kadar sırasıyla:

$$A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_3, A_2, A_1$$

rumuzlarıyla irâe edelim. Bu takdirce:

$$N_{10} = A_n.\mathrm{B}^{\mathrm{n}-1} + A_{n-1}.\mathrm{B}^{\mathrm{n}-2} + \cdots + A_3.\mathrm{B}^2 + A_2.\mathrm{B} + A_1$$

münasebeti husûle gelir.

Bu münasebetten anlaşılır ki, ma'lûm olarak verilmiş N_{10} adedi, "B"nin emsaliyle A_1 mecmûuna müsâvîdir. İmdi A_1 adedi B den küçüktür. Bu sebepten, A_1 adedi, N_{10} adedinin B ile taksîminden kalan bâkîdir.

Bu taksîmden zuhur eden hâric-i kısmeti φ_1 ile gösterirsek:

$$\varphi = A_n.\mathrm{B}^{\mathrm{n}-2} + A_{n-1}.\mathrm{B}^{\mathrm{n}-3} + \cdots + A_3.\mathrm{B} + A_2$$

müsâvâtı tahaddüs eder. Bu müsâvâtın her iki tarafı da yine B ile taksîm edilse, bu taksîmden kalan bâkî de A_2 olur. Bundaki hâric-i kısmeti de φ_2 ile göstermiş olsak,

$$\varphi_2 = A_n.\mathrm{B}^{\mathrm{n}-3} + A_{n-1}.\mathrm{B}^{\mathrm{n}-4} + \cdots + A_4.\mathrm{B} + A_3$$

müsâvâtı husûle gelir ki burada da, bu müsâvât yine B ile taksîm edilse, bâkînin A_3 olduğu anlaşılır.

İşte, bu minval üzere bu muameleye, B'den küçük bir hâric-i kısmet elde edilinceye kadar devam edilir.

Bundan sonra, artık ameliyata devama imkân olmadığından burada tevakkuf olunur.

Bu taksîmât-ı mütevâliyeye dikkatle bakılırsa, görülür ki, birinci bâkî N_B adedinin âhâd mertebesinden, ikincisi aşerât ve en son bâkî de, en yüksek mertebesinden ibarettir.

Bir misal ile tavzîh-i merâm edelim:

Yukarda (g) ile gösterdiğimiz misali alalım:

Kaide (10) olduğuna göre yazılmış 7865 adedini, kaidesi (12) olan adede tahvil etmek matlûb olsun; şöyle icrâ-yı amel olunur:

7865	12	12	12
(5)	655	54	(4)
	(7)	(6)	

Burada bâkîleri parantez dâhilinde göstererek yazdık. Aded-i matlûb şudur: 4675.

Bu hâlde:

$7865_{10} = 4675_{12}$ olur.

4. Üçüncü Kaziyye: Kaidesi (b) olarak yazılmış bir adedin, kaidesi (B) olan adede tahvili matlûb olsun.

Evvel-emirde kaidesi (b) olan aded, kaidesi (10) olan adede tahvil olunur. Ve sonra, bildiğimiz usul ile de bu aded, kaidesi (B) olan adede tahvil edilir.

Mesela kaidesi (8) olarak yazılmış 14213_8 adedini, kaidesi (12) olan adede tahvil için evvel-emirde bu aded, şöylece kaidesi (10) olan adede tahvil edilir:

$$1.8 = 8; 8 + 4 = 12; 12.8 = 96; 96 + 2 = 98; 98.8 = 784; 784 + 1 = 785; 785.8 = 6280; 6280 + 3 = 6283$$

Şimdi bulduğumuz şu 6283 adedini – ki kaide (10) olarak yazılmıştır – kaide "12"ye tahvil edelim:

6283	12	12	12
(7)	523	43	(3)
	(7)	(7)	

Matlûb olan adedin, 3777_{12} olduğu tahakkuk etmiş olur. Yani şu münasebât husûle gelir:

$$14213_8 = 6283_{10} = 3777_{12}$$

İkinci Fasıl

Cem‘ ve Tarh

(Ta‘rîfât)

5. **Tamâm-ı adedî:** Bir adedin kendinden büyük, diğer bir adede göre tamamîsi demek, birinci adedi, ikinciye doldurmak için, birinciye zammı icap eden adeddir.

Bu tarif, ekser hesâb kitaplarında münderic ta‘rîfâta pek de uymazsa da umumîdir. Ekser kitaplardaki tarif şöyledir:

“Bir adedi, kendinden sonra ilk gelen “10”un kuvvetine doldurmak için, bu adede zammı lazım olan adeddir.”

Gerçi ekseriyetle bu son tarife göre icrâ-yı amel olunursa da, bize taksîm bahsinde birinci tarife göre de iş görmek icap edeceğinden onun da burada tarifini münasip addeyledik.

Umumi tarife göre mesela a adedinin, h adedine göre [$h > a$ olmak şartıyla] tamâmîsi eğer $a + q = h$ müsâvâtı sahih ise q adedidir.

İkinci tarife nazaran: a adedinin tamâmîsi, eğer “a”nın n kadar rakamı varsa,

$$a + q = 10^n$$

müsâvâtında q adedidir.

Bu ikinci tarife göre, tamâm-ı adedî bulmak için pek kolay usul vardır.

Herhangi bir adedin olursa olsun, tamâm-ı adedîsini bulmak için, o adedin âhâd mertebesindeki rakamı 10'dan, sair mertebe rakamlarını 9'dan tarh etmek kâfidir.

Mesela 8976 adedinin tamâm-ı adedîsini bulmak için, yalnız 6 rakamını 10'dan, sair mertebe rakamları olan $8, 9, 7$ rakamlarını da 9'dan tarh etmelidir. Bu hâlde tamâm-ı adedî: 1024'ten ibarettir ki,

$$8976 + 1024 = 10^4 = 10000$$

olup tarife muvafıktır.

Bir de, birinci tarife göre bir misal yapalım:

Mesela 34652 adedinin 40000 adedine göre, tamâm-ı adedîsini bulmak lazım gelse, şöylece yapmalıdır:

$$40000 - 34652 = 5348$$

müsâvâtında 34652 adedinin tamâm-ı adedîsi 5348 adedidir. Zîrâ

$$34652 + 5348 = 40000$$

olup tarife muvafıktır.

6. Sual: Bir adedi, diğer bir adedden ve mesela, 56342 adedini 78925 adedinden tarh etmek için şu aşağıdaki tamâm-ı adedî usulünü takiben icrâ-yı amel olunabilir:

Bir cem' ameli yapar gibi hareket ediniz. Şu kadar var ki, küçük adedin (matrûhun) âhâd mertebesinin yerine, "10" adedine varmaya hangi aded lazımsa zihnen onu koyunuz. Küçük adedin (matrûhun) sair mertebe-i erkâmı yerine de 9 adedine varmak için hangi adedler icap ediyorsa onların vaz‘ olunduğunu farz ediniz. En nihayette, yani neticede sol taraftan vâhid hazf ediliverince matlûb olan tefâzul bulunmuş olur. Yani şöyle yapınız:

$$\begin{array}{r} 78625 \\ -\ 56342 \\ \hline 22283 \end{array}$$

Bu misalde şöyle denilecek: 2’den “10”a varmaya 8 ister; 5 daha 13. 3 adedini hatt-ı ufkînin altına ve âhâd mertebesi hizasına kor; elde var bir derim. 1 ile 2, 3 eder; “4”ten “9”a varmaya 5 ister; 3 daha 8 eder. Bunu da aşerât mertebesi hizasına yazarım; burada elde bir şey yoktur. “3”ten “9”a varmaya “6” ister; (6) daha (12) eder; (2)yi miât mertebesinin hizasına kor; elde var (1) derim ve bunu (8) adedine zam eylerim; (9) eder. (6)dan (9)a varmaya (3) ister, (9) daha: (12) eder; (2)yi yazarım ve elde var bir der, (7)ye veririm, (8) eder. (5)ten (9)a varmaya (4) ister, (8) daha (12); (2)yi yazarım, elde var bir der ve bu son vâhidi hazf ederek matlûb olan tefâzulü bulmuş olurum.

Bunun ispatı pek basittir. Şu aşağıdaki ifadeyi iyice nazar-ı dikkatten geçiriniz. İşi derhal anlarsınız:

$$\begin{aligned} 78625 - 56342 &= 78625 - 56342 + 100000 - 100000 \\ &= 78625 + (100000 + 56342) - 100000 \\ &= 78625 + 43658 - 100000 = 22283 \end{aligned}$$

7. **Sual:** İki adedi yekdiğerine zam etmek için, bir tarh ameli yapar gibi hareket etmeli, yani, bu iki adedi birbiri altına yazmalı, altındaki adedin âhâd mertebesindeki rakamın (10) adedine varmaya ne isterse, onu üstteki adedin âhâdinden tarh etmeli; sonra, altındaki adedin sair mertebeleri rakamlarının (9) adedine varmaya ne isterse, onları üstteki adedlerin mütenâzıran mertebelerinden çıkarmalı. Ve bu minval üzere devam ederek, nihayet altındaki adedin en büyük mertebedeki rakamına, yani son mertebesindeki rakama gelince, bundan sonra gelen üstteki adedin rakamına bir vâhid zam eylemelidir.

Mesela 67895 adedi ile 682 adedini cem‘ etmek için şöylece icrâ-yı amel etmelidir:

$$\begin{array}{r} 67895 \\ +\quad 682 \\ \hline 68577 \end{array}$$

2’den (10)a varmaya 8 ister, (15)ten 8 çıkarsa 7 kalır; 8’den (9)a varmaya (1) ister, (8)den çıkarsa 7 kalır; (6)dan (9)a varmaya 3 ister, (8)den çıkarsa 5 kalır;

Burada alttaki adedin son mertebesindeki rakama geldik. Bundan sonra, üstteki adedin gelen rakamı 7’dir. Buna bir vâhid zam edince 8 olur. Bu (8)i de hatt-ı ufkînin altına yazmalı; sonra da geride kalan (6) rakamını da aşağı almalıdır.

Bunun ispatı da, yine bundan evvelki sualin ispatı gibidir. Yani 682 adedinin tamâm-ı adedîsini alarak icrâ-yı amel eylemelidir. İşte şöyle yapmalıdır:

$$\begin{aligned} 67895 + 682 &= 1000 - 1000 + 67895 + 682 \\ &= (1000 + 67895) - (1000 - 682) \\ &= 68795 - 318 = 68577 \end{aligned}$$

8. Eğer üç rakamdan ibaret olan bir adedin kendisiyle ma’kûsu beynindeki tefâzul alınsa, bu tefâzulün ortasındaki rakam (9)dan ve iki nihayetindeki rakamların mecmûu da yine (9)dan ibarettir. İspat ediniz?

Aded-i mefrûzu abc ile gösterelim; bu adedin ma'kûsu; cba olur ve mademki tarh ameli mümkünü'l-icrâdır,

Bu hâlde, $abc > cba$ 'dır. Yani miât mertebesindeki a rakamı, âhâd mertebesini işgal eden c rakamından a'zamdır. Yani $a > c$ 'dir. Bu takdirce, tefâzulün âhâd mertebesindeki rakamını elde etmek için, c rakamına (10) zam edip bu mecmû'dan a rakamını çıkarmalıdır. Ve eğer tefâzulün âhâdini işgal eden rakamı U ile göstermiş olsak, şu münasebet vücuda gelir.

$$U = c + 10 - a \; \dots (1)$$

[Meseleyi iyice kavramak için tarh amelini icra eder gibi şöylece:

abc
-cba

gösterelim.]

Bundan sonra üst taraftaki sütuna yani aşerât mertebesine geçilir. Burada c rakamına zam edilen (10) adedi nazar-ı dikkate alınarak b rakamına (1) zam edilir. Lakin b'den $(b + 1)$'i çıkarmak için, b'ye bir (10) ilavesi icap eder: Bu hâlde tefâzulün aşerât rakamı:

$$b + 10 - (b + 1) = b + 10 - b - 1 = 9$$

olur. Nihayet, tefâzulün P miâtını elde etmek için, c'ye (1) zam olunarak:

$$p = a - (c + 1) \dots (2)$$

olur.

Şimdi, (1) ile (2) ifadeleri taraf tarafa cem' olunsa:

$$p + u = c + 10 - a + a - (c + 1) = 9$$

olup meselenin ikinci şıkkı da halledilmiş olur.

Kolaylıkla görülür ki, eğer $a = c$ olsa, matlûb tefâzulün sıfır olacağı aşikârdır.

9. Üç rakam-ı müteâkibden müteşekkil bir aded ile ma'kûsu beynindeki fazl, 198 adedine müsâvîdir.

Bi'l-farz, üç rakam-ı müteâkib: $(n+1), (n), (n-1)$ ile gösterilmiş olsun. Bu hâlde, ta'dâd ve terkîm kavâidi mûcibince bu üç rakamdan müteşekkil aded de:

$$100(n+1) + 10n + (n-1)$$

olur.

Bu adedin ma'kûsu da şudur:

$$100(n-1) + 10n + (n+1)$$

Bunların beynlerindeki fazl da şuna müsâvîdir:

$$100(n+1) - 100(n-1) + 10n - 10n + (n-1) - (n+1)$$

Yahut:

$$100n + 100 - 100n + 100 + n - 1 - n - 1$$

Veyahut,

$$200 - 2 = 198$$

olup matlûb sabit olur.

10. Büyüğünden bed' ile, sırasıyla ve soldan sağa doğru, aded-i erkâmı müsâvî üç aded-i müteâkib - ta'dâd ve terkîm kavâidi mûcibince bir aded teşkil edecek surette – birbiri ardınca yazılır; husûle gelen bu adedden, yine aynı adedler, fakat sağdan sola doğru aynı usulde yazılarak, teşekkül eden aded tarh edilir. İspat etmek matlûbdur ki bu neticeler yani tefâzuller şunlardır:

$$198, 19998, 1999998, \dots, 199^{2n-1\ fois\ 9} \dots 98$$

Bu tefâzuller sırasıyla: $1, 2, 3, \dots, n$ rakamlarından müteşekkil adedlerden husûle gelmiştir.

Eğer mevzû-i bahs olan üç adedin üçü de birer rakamdan ibaret ise bu hâl, bundan evvelki da'vada ispat edilmiş idi ki, tefâzul: 198'dir. Şimdi, o üç aded-i müteâkibi ikişer rakamlı tasavvur edelim. Ve bu rakamlardan aşerât mertebesindeki rakamı d ile âhâddeki rakamı da u ile gösterelim. Bu hâlde, üç aded-i müteâkib şunlar olur:

$$10d + u, 10d + (u - 1), 10d + (u - 2)$$

Bu takdirce, mutasavver aded şu ifade ile gösterilir:

$$100000d + 10000u + 1000d + 100(u - 1) + 10d + (u - 2)$$

Bu adedden, şu adedin tarhı lazımdır:

$$100000d + 10000(u - 2) + 1000d + 100(u - 1) + 10d + u$$

Tefâzulü de şudur:

$$10000u - 10000(u - 2) + u - 2 - u$$

Yahut:

$$20000 - 2 = 19998$$

olur.

Bu takdirce, bir rakamlı üç aded için tefâzul:

$$2.10^2 - 2 = 198,$$

İki rakamlı üç aded için tefâzul:

$$2.10^4 - 2 = 19998$$

dir. Bunları ispat ettik. İspatı ta'mîm ederek de, n rakamlı üç adedin tefâzulünün de şu olduğu kolaylıkla anlaşılır:

$$2.10^{2n} - 2$$

Zîrâ; n rakamlı herhangi bir N adedini olursa olsun tasavvur edelim. Ve bu adedden evvel ve sonra, ilk gelen iki adedi de $N - 1$ ve $N + 1$ ile gösterelim.

$N = abc \ldots mf$ olduğunu farz edelim.

$$(N + 1), (N), (N - 1)$$

adedlerini sırasıyla yazacak ve bunların bir araya gelmelerinden, $3n$ rakamlı bir adedin vücut bulacağını nazar-ı dikkate alacak olursak, birinci netice:

$$\begin{aligned} a.10^{3n-1} + b.10^{3n-2} + \cdots + m.10^{2n+1} + (f + 1).10^{2n} \\ + a.10^{2n-1} + b.10^{2n-2} + \cdots + m.10^{n+1} + f.10^n \\ + a.10^{n-1} + b.10^{n-2} + \cdots + m.10 + (f - 1) \end{aligned}$$

olur. Şimdi de,

$$(N - 1), (N), (N + 1)$$

adedlerini sırasıyla yazacak olursak, şu ikinci neticeyi elde etmiş oluruz:

$$\begin{aligned} a.10^{3n-1} + b.10^{3n-2} + \cdots + m.10^{2n+1} + (f - 1).10^{2n} \\ + a.10^{2n-1} + b.10^{2n-2} + \cdots + m.10^{n+1} + f.10^n \\ + a.10^{n-1} + b.10^{n-2} + \cdots + m.10 + (f + 1) \end{aligned}$$

Bu iki neticenin tefâzulleri - işaretleri muhtelif müşterek haddler tayy edildikte şudur:

$$(f+1).10^{2n}-(f-1),10^{2n}+(f-1)-(f+1)$$

Yahut:

$$f.10^{2n}+10^{2n}-f.10^{2n}+10^{2n}+f-1-f-1$$

Veyahut:

$$2.10^{2n}-2=1999^{2n-1\ kere\ 9}\ldots 98$$

olup matlûb sabit olur.

TÜBA

TÜRKİYE BİLİMLER AKADEMİSİ

TURKISH ACADEMY OF SCIENCES

www.tuba.gov.tr

Üçüncü Fasıl

Darb

Burada bazı ta‘rifâtı hatıra getirelim:

11. Bir aded-i tâmmı, diğer bir aded ile darb etmek, birinci adedi, ikincinin âhâdi kadar tekrar etmektir. Bu tariften, derhal şu netice istihsal olunur: a aded-i tâmmını, diğer bir b adedi ile darb etmek için, a adedini (b)nin âhâdi kadar tekrar ederek cem‘ eylemek kâfidir.

12. Da’vâ-yi Nazarî: İki madrûbun hâsıl-ı darbı, madrûblarının sıraları değişmekle tebeddül etmez.

Bi’l-farz ma‘lûm olan iki madrûb a ile b olsun. Ben derim ki,

$a.b = b.a$ [2]

müsâvâtı sahihtir. Zîrâ,

Bir hatt-ı ufkî üzerine, a adedinin hâvî olduğu âhâdi birer birer yazalım ve bu hattın aynı olmak üzere b adedinin âhâdi kadar hutût-u ufkiyyeyi tekrar edelim ve şuna dikkat edelim ki aynı

---

[2] A‘dâd-ı müteaddidenin yekdiğeriyle darb edileceği şu suretlerle gösterilir:

$$h.a.b = h \times a \times b = hab$$

sıranın âhâdi aynı sütun üzerinde bulunsun; bu hâlde şu mustatîl cetvelini husûle getirmiş oluruz:

	1 1 1 … 1 a kadar
b kadar	1 1 1 … 1
kadar	………
	1 1 1 … 1

Şimdi, hatt-ı ufkîleri sayacak olursak, beherinde a kadar vâhid var; b kadar da hatt-ı ufkî var. Öyleyse cetvelde $a.b$ kadar vâhid var. Yok eğer sütunları ta'dâd edecek olusak, bunların beherinde b kadar vâhid var, a kadar da sütun mevcuttur. Bu hâlde cetvelde $b.a$ kadar vâhid mevcuttur. Hâlbuki bu iki nevi' hesâb aynı cetvelin hâvî olduğu âhâd üzerinde yapıldığından sabittir. Bu sebepten $\mathrm{a.b} = \mathrm{b.a}$] müsâvâtı sahih olup matlûb sabit olur.

13. Da'vâ-yi Nazarî: Üç madrûbun hâsıl-ı darbı, iki madrûbunun yerleri değişmekle tebeddül etmez.

Yani $\mathrm{a.b.c} = \mathrm{a.c.b}$ müsâvâtının doğru olunduğunu ispat etmek matlûbtur.

Bir hatt-ı ufkî üzerine a adedini, b adedinin âhâdi kadar yazalım; sonra, bu hatt-ı ufkîyi aynen c adedinin âhâdi kadar tekrar ederek kaydedelim. Şu:

a a a … a

a a a … a

……..

a a a … a

mustatîl cetvelini tertip etmiş oluruz.

Şimdi, bu cetvelde mevcut bütün adedleri cem‘ edelim: Ne taraftan cem‘e başlasak neticeler – mademki aynı cetvelde mevcut adedlerin mecmûu çıkacak – sabittir. Yani yekdiğerine müsâvîdir.

Mesela, hutût-u ufkiyyeyi cem‘den başlayalım:

Her hatt-ı ufkîde b kadar a mevcuttur. Öyleyse beherinde $a.b$ kadar âhâd var. c kadar da hatt-ı ufkî var. Bu hâlde cetvelde $a.b.c$ kadar aded mevcuttur.

Bir de şu tarzda hesâb yapalım:

Beher sütunda c kadar a var. Yani $a.c$ kadar âhâd var. Sütunların miktarı da b kadardır. Öyleyse cetvelin muhteviyatı $a.c.b$ kadar adedden ibarettir. Bu sebepten:

$$a.b.c = a.c.b$$

müsâvâtı sahih olup matlûb sabit olur.

14. Da’vâ-yi Nazarî: Madrûbât-ı müteaddideyi hâvî bir hâsıl-ı darb, son iki madrûbunun yerleri değişmekle tebeddüll etmez.

Bi’l-farz, şu altı madrûbun hâsıl-ı darbını ele alalım:

$$a.b.c.d.h.k$$

Ben derim ki:

$$a.b.c.d.h.k = a.b.c.d.k.h$$

müsâvâtı sahihtir. Zîrâ,

$$A = a.b.c.d$$

farz edelim. Bu hâlde yukarıki hâsıl-ı darb:

$$A.h.k$$

şekline tahavvüll eder. Bundan evvelki davâ-yi nazarî mûcibince:

$$A.h.k = A.k.h$$

olur.

A adedinin müsâvîsi mahalline konsa:

$$a.b.c.d.h.k = a.b.c.d.k.h$$

olup matlûb sabit olur.

15. Da'vâ-yi Nazarî: Madrûbât-ı müteaddide hâsıl-ı darbı, herhangi iki madrûb-ı müteâkibenin olursa olsun, yerleri değişmekle tebeddül etmez. Mesela şu:

$$a.b.c.d.h.k.f$$

hâsıl-ı darbının, bi'l-farz d ile h iki madrûb-u müteâkibenin yerleri değişmiş olsa, hâsıl-ı darb tebeddül etmez. Yani:

$$a.b.c.d.h.k.f = a.b.c.h.d.k.f$$

müsâvâtı sahihtir. Zîrâ, (Madde 14) mûcibince:

$$a.b.c.d.h = a.b.c.h.d$$

olup bu iki müsâvî hâsıl-ı darb k ile darb edilse, yine yekdiğerine müsâvî iki hâsıl-ı darb husûle geldiği gibi, bu son müsâvî hâsıl-ı darblar da f adediyle darb edilseler yine birbirine müsâvî iki hâsıl-ı darbın tahaddüs edeceği bedîhîdir. Bu sebepten:

$$a.b.c.d.h.k.f = a.b.c.h.d.k.f$$

olup matlûb sabit olur.

16. Da'vâ-yi Nazarî: Madrûbât-ı müteaddideyi hâvî bir hâsıl-ı darb, madrûblarının – istenildiği gibi - yerleri değişmekle tebeddül etmez.

Bunun ispatı pek kolaydır. Her iki madrûb-u müteâkibin yerleri değiştirilerek ve buna, maksada vasıl oluncaya kadar devam edilerek, herhangi bir madrûbu olursa olsun, istenilen mevki'ye getirmek mümkündür. Şu aşağıdaki muameleye bakarak ameliyatın ne suretle icra edileceği anlaşılır. Mesela,

$$a.b.c.d.h.k.f$$

hâsıl-ı darbının keyfe-me'ttefak k ile b iki madrûbunun – hâsıl-ı darba halel gelmemek şartıyla – yerleri değişilebilir ve buna şöyle icrâ-yı amel olunarak muvaffak olunur:

[15. Madde esas ittihâz edilerek]

$$\begin{aligned} a.b.c.d.h.k.f &= a.b.c.d.k.h.f = a.b.c.k.d.h.f \\ &= a.b.k.c.d.h.f = a.k.b.c.d.h.f \\ &= a.k.c.b.d.h.f = a.k.c.d.b.h.f \\ &= a.k.c.d.h.b.f \end{aligned}$$

17. Da'vâ-yi Nazarî: İki adedin hâsıl-ı darbı, bu iki adedde kaç rakam varsa o kadar rakamı veya o kadar rakamla bir noksanını hâvîdir.

a ile b iki aded-i tâm olsun; bunlardan birincisi p kadar ikincisi de q kadar rakamı hâvî bulunsun. Bu takdirce:

$$10^{p-1} \leq a < 10^{p}$$

$$10^{q-1} \leq b < 10^{q}$$

münasebetleri hâsıl olur.

Bu münasebetler taraf tarafa darb edilseler:

$$10^{p+q-2} \leq a.b < 10^{p+q}$$

Bu son ifadeden anlaşılır ki, $a.b$ hâsıl-ı darbı en aşağıdan $(p+q-2+1)$ rakamı yani $p+q-1$ rakamını hâvîdir. En yukardan da $(p+q)$ kadar rakamı hâvî olup da'vamız sübut bulmuş olur.

18. Sual: İki adedin hâsıl-ı darbını bulmak için, darbın yerine bunun tamâm-ı adedîsi kullanılmış olsa acaba nasıl hareket edilmek icap eder?

Şöyle hareket etmeli:

Madrûbu M ile ve n rakamlı farz ettiğimiz dâribi da m ile göstermiş olsak, şu münasebât husûle gelir:

$$10^{n-1} < m < 10^n$$

Şimdi şu müsâvâtı da nazar-ı dikkate alalım:

$$M \times m = M.(10^n - 10^n + m) = M \times 10^n - M.(10^n - m)$$

Burada $(10^n - m)$ ifadesi m adedinin tamâm-ı adedîsidir. Bunu: c ile irâe eylesek, yukarıki müsâvât şu hâle ircâ edilir:

$$M.m = M.10^n - M.c$$

Şu son düsturu âdî lisana tercüme edelim:

"Madrûbu irâe eden adedin önüne yani sağına dâribdeki erkâmın adedi kadar sıfır koymalı; sonra dâribin tamâm-ı adedîsi ile madrûbu darb ederek, hâsılını yukardaki önüne sıfır konularak husûle gelen adedden tarh etmelidir."

Mesela, madrûb $M = 5623$ olsun; dârib de: $m = 815$ adedi intihâb edilsin. Yukardaki düstura tatbîken:

$5623000 - 185.5623 = 5623000 - 1040255 = 4582745$ olur.

Dördüncü Fasıl

Taksîm

19. **Tarif:** İki aded-i tâmmın hâric-i kısmeti, bu adedlerin a‘zamında asgarın en büyük aded-i tâm kadar dâhil olanıdır.

20. **Tembih:** A ile B iki aded-i tâm olsun. Ve $A > B$ farz olunsun. Ve tasavvur edelim ki, B adedi ayrıca:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \qquad (1)$$

adedleriyle darb edilerek:

$$B, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, \dots \qquad (1)$$

adedlerini husûle getirmiş olsun ki, bunlar ilâ-nihâye tezayüd ederek gitmektedirler. (2) silsilesinin her haddi, B adedinin tamamen herhangi bir misli kadardır. Birinci hadd, (B)yi bir defa, ikinci hadd iki defa ve üçüncüsü 3 defa: … 4’üncüsü de 4 defa hâvîdir.

Bu husus böylece takarrür ettikten sonra, A adedini (2) silsilesinin muhtelif haddleriyle mukayese edelim:

Bu mukayesede iki hâl karşısında bulunuruz ya A adedi, tamamen silsilenin bir adedine müsâvî ve mesela φB adedine müsâvîdir veyahut iki aded arasında bulunur, yani φB'den büyük ve $B(\varphi + 1)$'den küçüktür. Bu hâlde φ adedi, her iki hâlde de A adedinde B'nin en büyük aded-i tâmmı kadar dâhil olduğunu gösteriyor. Yani bu iki adedin (φ) hâric-i kısmetidir. Görülüyor ki, A ile B adedlerinin hâric-i kısmeti bilâ-şek ve şübhe şu münasebâta muvafıktır.

$$B\varphi \leq A < B(\varphi + 1)$$

Eğer A adedi "B"yi tamamen φ adedi kadar hâvî ise o hâlde, yukarıki münasebât şuna: $A = B\varphi$'ye tahavvül eder.

21. Da'vâ-yi Nazarî: Her taksîmde, maksûm, bâkînin dı'fından a'zamdır.

Mesela, D maksûm, d kâsım,[3] (φ) hâric-i kısmet, R de bâkî olsa,

$$D = d.\varphi + R$$

münasebeti "taksîm kavâidi mûcibince" sahihtir.

Bu münasebette φ hâric-i kısmeti, en aşağı vâhide müsâvî olabilir; bu hâlde;

$$D = d.\varphi + R$$

münasebeti de:

$$D = d + R$$

ifadesine tahavvül eder.

Lakin taksîm kavâidindendir ki bâkîler, kâsımlardan asgardır. Bu hâlde $R < d$ olduğundan $D > 2R$ olup matlûb sabit olur.

[3] Maksûmün aleyh dedikleri adede biz kâsım diyoruz ki, hem muhtasar, hem de daha vâzıhtır.

Taksîmin Tamâm-ı Adedî Usulü ile Suret-i İcrâsı

22. Bir adedin tamâm-ı adedîsini "5"inci maddede tarif ve beyan etmiş idik. Oraya müracaatla tamâm-ı adedî hakkında malumat alınabilir.

23. **Da’vâ-yi Nazarî:** Eğer, maksûma hâric-i kısmetle kâsımın tamâm-ı adedîsi hâsıl-ı darbı zam edilirse, bu mecmû, en yüksek adedi hâric-i kısmet olmak üzere bâkî zuhur eder.

Bu tarifi iyice anlamak için bir misal ile tavzih edelim:

Maksûm: 795, kâsım: 86 farz olunsun burada; eğer maksûm olan 795 adedine kâsımın tamâm-ı adedîsi olan "14" ile hâric-i kısmet "9"un hâsıl-ı darbı zam edilse yani:

$$795 + 9.14 = 921$$

münasebeti hâsıl olur ki, burada "921" adedinin son iki rakamı olan "21" adedi bâkîdir, "9" da hâric-i kısmettir. İşte bunu nazar-ı dikkate alarak da’vâ-yi nazarîyi anlamak pek kolaydır.

Şimdi gelelim da’vanın ispatına:

Yukardaki şimdi tavzih için yaptığımız misali alarak onunla ispatı icra edelim:

Kâsımın tamâm-ı adedîsi: $100 - 86 = 14$’tür. Biz, kendi bildiğimiz taksîmi icra etmiş olalım. Onun kaidesi mûcibince:

$$795 = 9.86 + 21 \quad \dots (1)$$

müsâvâtını yazmamız lazım gelir.

Lakin yukardaki $100 - 86 = 14$ müsâvâtından $100 - 14 = 86$ münasebeti elde edilerek "1" müsâvâtında mahalline vaz‘ olunsa:

$$795 = 9.(100 - 14) + 21$$

olup, bundan:

$$795 = 900 - 9.14 + 21$$

Yahut:

$$795 + 9.14 = 921$$

olur ki, da’vamız sübut bulmuş olur.

Bu da’vayı bir de umumî bir surette ispat edelim; bu taksîmde:

D maksûm, d kâsım, R bâkî olsun. İspatı umumî bir surette yapacağımız için, ta‘dâd ve terkîmdeki "10" kaidesi yerine "B"yi kaide farz edelim. Kâsım da n kadar rakamı hâvî bir aded olsun. Bu hâlde kâsım olan d’nin tamâm-ı adedîsi:

$$B^n - d = C \quad ...(2)$$

olur.

Şimdi âdî taksîmde yapılan ameliyat mûcibince şu müsâvât husûle gelir:

$$D = d.\varphi + R \quad ...(3)$$

Burada (φ) kemmiyyeti hâric-i kısmeti gösterir.

(2) müsâvâtından:

$$d = B^n - C$$

istihrâc olunup "3"te mahalline vaz‘ edilse:

$$D = \varphi(B^n - C) + R$$

Yahut:

$$D = \varphi.B^n - \varphi.C + R$$

Yahut:

$$D + \varphi . C = \varphi . B^n + R \quad ...(4)$$

olur.

Burada B kaide olduğuna göre (10) ile irâe olunur yani kaide mesela (12) olsa, bu (10) kaidesi (12) diye okunur. Bu hâlde

$$\varphi . B^n = \varphi 0000 \ldots \ \ n \; kadar \; sıfır$$

dır.

Şimdi (4) müsâvâtında maksûm olan D adedine hâric-i kısmetle d kâsımının tamâm-ı adedîsi olan (C) adedi hâsıl-ı darbı zam edilmiş şu: $\varphi . B^n + R$ husûle gelmiş, hâlbuki her taksîmde bâkî kâsımdan asgardır. Öyle ise burada da $R < d$ münasebeti sahihtir. Bundan başka da $d < B^n$ olup bu takdirce: $B^n > R$ gayr-i müsâvâtı sahihtir. Bu sebepten (4) müsâvâtının sağ tarafındaki $\varphi . B^n + R$ mecmûunda $R + \varphi 000 \ldots \ \ n \; kadar \; sıfır$ olup φ hâric-i kısmeti R'nin en yüksek mertebesindeki rakam olarak tezahür etmiş olur.

Daha ziyade tavzîh-i merâm için R bâkîsini abc ... rakamlarından hâsıl olmuş bir aded farz etsek yani $R + \varphi 000$ ... ve $R = abc$ ... olsa, mecmûunda mahalline konsa:

$$\varphi abc \ldots$$

olmuş olur ki, asıl R bâkîsini yani maksûm-ı cüz'îsini bulmak için bâkînin en yüksek mertebesini çeleriz, yani, hazf ederiz. Geriye yalnız: abc ... bâkîsi kalır ki, bizim de istediğimiz budur.

23. Kaide: Kâsımın tamâm-ı adedîsini alarak taksîm ameliyatını yapmak için: Evvel-emirde, kâsımın âhâd mertebesini ondan ve sair mertebe rakamlarını 9'dan tarh ederek husûle gelecek olan tamâm-ı adedîyi kâsımın üstüne yazmalı ve sonra hâriç kısmını, eski usulde yani maksûm ile asıl kâsım arasında taharrî ederek tayin etmeli ve bu hâric-i kısmeti, kâsımın tamâm-ı adedîsine darb ederek, hâsıl-ı darbı maksûmun altına yazıp bununla cem‘ eylemeli ve sonra bu hâsıl-ı mecmûun en yüksek mertebesini çizerek asıl maksûm-ı cüz'îyi yani bâkîyi bulmalıdır.

Birkaç misal ile tenvîr-i fikr edelim:

Mesela 8257369 adedinin 799 adedine taksîmi matlûb olsun. Şöylece yapmalı:

```
           | 201
  8257369  | 799
   201     |------
 --------  | 10334
 1,02673   |
    603
 --------
   3,2766
     603
  --------
    3,3699
       804
   --------
     4,503
```

Evvel-emirde 796 adedinin tamâm-ı adedîsini 201 bulduk; kâsımın üstüne yazdık; sonra maksûmdan 825 adedini bit-tefrîk 799 adediyle adediyle mukayese ettik. 825 adedinde (1) defa dâhil olduğunu bulduk; şimdi bu (1)i kâsımın tamâm-ı adedîsi olan (201) ile darb ederek bu hâsılı (825) altına yazdık ve bununla cem‘ eyledik: 1026 adedi husûle geldi ki, bunların en yüksek mertebesi olan (1)i çeldik. Yani hazf ettik. Geriye kalan (26) adedi asıl maksûm-ı cüz'îden yani bâkîden ibarettir.

İşte, sonuna kadar bu minval üzere devam olunarak nihayette hâric-i kısmetin 10334 ve bâkînin de (503) adedlerinden ibaret oldukları anlaşılmış olur.

Bakınız şu aşağıdaki misalde ne kadar sühûlet var:

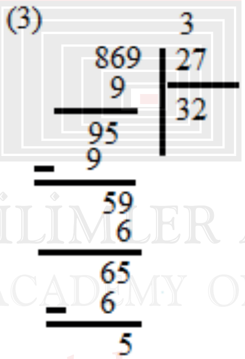
```
                 1
76354918207 | 9999
     7      |--------
-------     | 7636255
 7,63619    |
      6
-------
   6,36251
        3
   -------
     3,62548
          6
     -------
       6,25542
            2
       -------
         2,55440
              5
         -------
           5,54457
                5
           -------
             5,4462
```

Şimdi bu misalde bir kere, 7636255 adedinin rakamlarından beherini 9999 adedi ile darb edeceğinize yalnız vâhid ile darb ediyorsunuz; sonra her hâric-i kısmetin, maksûm-ı cüz'îlerin en yüksek rakamına müsâvî olacağına da bi'l-isbât kanaat hâsıl ettiniz. Bu hâlde hâric-i kısmet için hiç düşünmeye hacet kalmayarak hangi maksûm-ı cüz'îde iseniz, onun en yüksek rakamını hâric-i kısmet vermiş olursunuz. Demek oluyor ki, bâkîlerin en yüksek rakamı hâric-i kısmetin "kontrolör"ü yani bir nevi murakıbı olmuş oluyor.

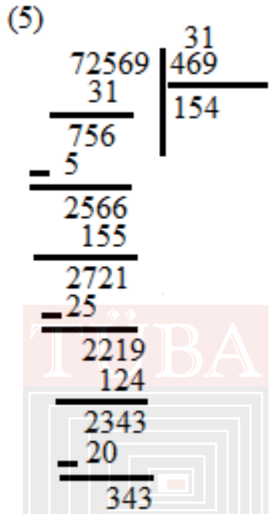
Şimdi yalnız bir cihet kaldı ki, onu da beyan etmeden geçmeyelim. O da şudur: Eğer kâsım, kendinden sonra gelen (10)un kuvvetinden pek dûn olur yani o kuvvetin nısfından aşağı bir aded olsa, onun tamâm-ı adedîsi kendinden büyük olacağından matlûb-ı sühûlet burada hâsıl olmuyorsa da, biz onun da kolayını bulduk. O hâlde kâsımın, kendinden sonra gelen (10)un kuvvetine göre değil, kendinden sonra ilk gelen sıfırlı bir adede göre tamâmîsini alırız. Îzâh-ı merâm edelim:

Mesela, kâsım 27 adedi olsun, o hâlde bunun kendinden sonra gelen (10)un kuvveti 100'dür. Buna göre de (27) adedinin tamamı: 73'tür ki, kendinden büyüktür. Bunu böyle almayız; (27)den sonra ilk gelen sıfırlı aded (30)dur. İşte (27)nin tamamını bu (30) adedine göre alırsak (3) buluruz [5'inci maddeye müracaat].

Yalnız bunda, öteki usulden fazla bir fark var. Yine hâric-i kısmet kâsımın tamamına darb edilerek maksûmla cem' edilecekse de mecmûdan, hangi adede göre tamâmı alınmış ise o adedi hâric-i kısmet darb olunup hâsıl-ı darb tarh edilir. Mesela,



Burada (27) adedinin 3 tamâmîsini 30 adedine göre aldık ve (30) adedinin en yüksek mertebesini işgal eden (3) adedini maksûmun sol tarafına ve biraz yükseğe ve parantez dâhiline yazdık. İlk hâric-i kısmet (3)tür. Bunun tamâm-ı adedîsi olan 3 ile darbı 9 eder. Bu 9 adedini maksûmla cem' ederiz; 95 eder. Bu 95'ten hâric-i kısmet olan (3)ü parantez dâhilindeki (3) ile darb ederek hâsıl-ı darbı tarh ederiz. Tefâzul (5) olur. Yukardaki (9) adedini aşağı alır; 59 adedinde (27), 2 kere vardır. Bunu da tamâm-ı adedîye darb ederiz: 6 eder, 59 ile cem' edersek 65 adedi hâsıl olur. Bundan 3.2 = 6 adedini çıkarırız 5 kalır ki, 32 adedi hâric-i kısmetten 5 de bâkîden ibaret olmuş olur. Bu misalde (3)ler taaddüt ettiği için belki, teşvîş-i ezhânı mûcib olmuştur. Başka bir misal daha yapalım:



Burada, 469 kâsımının tamâm-ı adedîsini, kendisinden ilk gelen sıfırlı (500) adedine göre aldık. (31) bulduk. İşte (500)ün (5) rakamını maksûmun biraz soluna ve bir (parantez) dâhiline yazdık. Birinci hâric-i kısmeti (1) bulduk; 31 ile darb ederek maksûmla cem‘ ettik. 756 husûle geldi. Hâric-i kısmetle (parantez) dâhilindeki (5)in hâsıl-ı darbı olan 5.1 = 5 adedini 756 adedinin en yüksek mertebesinden tarh ettik. 256 hâsıl oldu. İşte bu minval üzerine devam ederek, hâric-i kısmetin: 154 ve bâkînin de 343 olduğu tebeyyün etmiş olur.

Tembih: Hâric-i kısmetle (parantez) dâhilindeki adedin hâsıl-ı darbını yazmak lazım değildir. Bunu zihnen tarh etmelidir. Ben yazdım ama meramımı vuzûhen anlatmak için yazdım.

Bu tembih mûcibince de bir misal yapalım da artık bu bahse nihayet verelim:

(4)

```
                    11
15504373  |  389
  33      |--------
-------   |  39857
1583      |
  3834    |
    99
-------
  3933
    3333
      88
--------
    3421
      2217
        55
     -------
      2272
        2723
          77
       -------
        2800
        0000
```

İşte burada hâric-i kısmet; 39857 ve bâkî de sıfırdır. Yani maksûm, tamamen kâsımla kâbil-i taksîm imiş.

Kâbiliyyet-i Taksîm

[Bu mebhas Congruence müteâdillerden sonra tedris edilmelidir.]

24. **Tarif:** Herhangi iki aded-i tâmmın olursa olsun, hâsıl-ı darbı, o adedlerden beherinin mislidir. Misal, 64 adedi 16 adedinin de 4 adedinin de mislidir. Çünkü $4.16 = 64$.

25. **Tembih:** Herhangi bir adedin olursa olsun, lâ-yuadd misilleri vardır. Bu misiller de bu adedin:

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

adedleriyle darbından hâsıl olan adedlerdir. Bu misillerin en küçüğü tabîî, bu adedin vâhidle hâsıl-ı darbıdır. Yani adedin kendisidir.

26. **Tembih**: Bir a adedinin mislini ya biri kendisi olmak üzere iki adedin hâsıl-ı darbı ile gösterilir. Veyahut:

$$mult.de\ a$$

rumuzuyla iş‘âr ederler. Bu son rumuz ($misl\ a$) demektir.

Şunu da söyleyelim ki: İki muhtelif aded aynı ifade ile yani, $mult.de\ a$ ifadesiyle gösterilebilir. Bu hâlde:

$$mult.de\ a - mult.de\ a$$

tefâzulüne sıfır nazarıyla bakılamaz.

Mesela 48 adedi 12 adedinin 4 mislidir. Bunun için:

$$mult.de\ 12$$

diye gösterildiği gibi, 36 adedi de yine 12 adedinin 3 misli olduğundan bu da:

$$mult.de\ 12$$

rumuzuyla gösterilir. Fakat hiçbir vakit burada: $mult.de\ a - mult.de\ a$ fazlı sıfıra müsâvî olamaz. Gerçi, buradaki a, 12 adedini gösteriyorsa da, birinci $mult.de\ a$ 48 adedini, ikincisi ise 36 adedini irâe ettiklerinden hiçbir vakit: $48 - 36$ tefâzulü sıfıra müsâvî değildir.

Hâsılı, vakta ki bir taksîmde hâric-i kısmet tamdır yani kâsım olan aded, maksûmda tamamen, bilâ-bâkî dâhildir, şu ifadelerle yâd olunur.

A adedi B adedinin mislidir,

A adedi B ile kâbil-i taksîmdir,

B adedi A adedini tamamen taksîm eder.

Bunlardan başka:

$$A = B.h$$

ifadesinde, A adedi B ve h adedlerinden beherinin misli olduğu gibi, B ve h adedlerinin beheri de A adedlerinin madrûbudur. Yani deminki:

$$64 = 4.16$$

müsâvâtında 64 adedi, 4 ile 16 adedlerinden beherinin misli olduğu gibi, 4 ve 16 adedlerinin beheri de 64 adedinin birer madrûbudur.

Kâbiliyyet-i Taksîm Kavâidinin Taharrîsi

27. Herhangi bir aded için olursa olsun, kâbiliyyet-i taksîm kavâidinin taharrîsi hakkında müteaddit usuller vardır.

Şurasını nazar-ı dikkatten dûr tutmamalıdır ki, bir adedin, diğer bir adedi tamamen taksîm edip etmemesini taharrî etmekten ise, bu taksîmden kalacak bâkîyi aramak daha mantıkî ve daha fâidelidir. Zîrâ, bâkî malum olduktan sonra, kâbiliyyet-i taksîm kendi kendine tezahür etmiş olur. Bâkî sıfır ise birinci aded yani kâsım, ikinci adedi tamamen taksîm ediyor demektir.

28. Usullerden biri, (10) adedinin kuvvetlerini herhangi bir adedle yani kâbiliyyet-i taksîmi murad olunan adedle taksîm ederek bunların bâkîlerini bulmaktır. Mesela 7 adedini ele alalım ve (10)un kuvvetleriyle olan bâkîlerini taharrî edelim:

$$\left.\begin{array}{l} 10^0 \equiv 1 \\ 10^1 \equiv 3 \\ 10^2 \equiv 2 \\ 10^3 \equiv 6 \equiv -1 \\ 10^4 \equiv 4 \equiv -3 \\ 10^5 \equiv 5 \equiv -2 \\ 10^6 \equiv 1 \\ \ldots \end{array}\right\} \text{(muaddil7)} \quad \ldots \text{(g)}$$

Şimdi, bi'l-farz: 89463571 adedinin (7) adediyle taksîminden kalacak bâkiyi bilmek için yukarıki (g) münasebetini nazar-ı dikkate alarak şöyle yapmalıdır.

$$\left.\begin{array}{l} 10^0.1 \equiv 1.1 \\ 10^1.7 \equiv 3.7 \\ 10^2.5 \equiv 2.5 \\ 10^3.3 \equiv -1.3 \\ 10^4.6 \equiv -3.6 \\ 10^5.4 \equiv -2.4 \\ 10^6.9 \equiv 1.9 \\ 10^7.8 \equiv 3.8 \end{array}\right\} \text{(muaddil 7)}$$

Bunları taraf tarafa cem‘ edelim:

$$1 + 70 + 500 + 3000 + 60000 + 400000 + 9000000 + 80000000 = 1.1 + 3.7 + 2.5 - 1.3 - 3.6 - 2.4 + 1.9 + 3.8$$

Veyahut:

$$89463571 \equiv 1.1 + 3.7 + 2.5 - 1.3 - 3.6 - 2.4 + 1.9 + 3.8\ (muaddil\ 7)$$

olur ki bundan şu kaide tahaddüs eder.

Kaide: Bir adedin (7) adediyle taksîminden kalacak bâkîyi bilmek için, evvel-emirde bu adedi sağdan sola doğru üçer üçer kısımlara ayırmalı; sonra sağdan birinci kısmın âhâd mertebesinden bed’ ile rakamları üstüne sıra ile: $1, 3, 2$ yazmalı; ikinci kısım için de aynı vech ile yapmalı; yalnız bu adedleri $(-)$ işareti ile kaydetmelidir. Hâsılı sağdan itibaren sola doğru, üç rakamlı her tek sıradaki kısma müsbet, her çift sıradaki kısma da menfi olarak $1, 3, 2$ adedleri yazılıp mukabil rakamlarla darb edilmeli ve tek sıra rakamlar mecmûu ile çift sıra rakamlar mecmûu beynindeki fazlı alarak bunu (7) üzerine taksîm etmeli. Bu taksîmden kalan bâkî sıfır ise bu aded (7) ile kâbil-i taksîmdir, eğer bâkî (7)den küçük müsbet bir aded ise bu aded bâkîden ibarettir.

Şu ta‘rîfâtı şöylece hülâsa edelim:

$$\begin{array}{r|r|r} {\scriptstyle 3\,1} & {\scriptstyle -2-3-1} & {\scriptstyle 2\,3\,1} \\ 89 & 463 & 571 \end{array}$$

$$1.1 = 1, 3.7 = 21, 2.5 = 10, -1.3 = -3, -3.6 = -18, -2.4 = -8, 1.9 = 9, 3.8 = 24 \ = 1 + 21 + 10 + 9 + 24 = 65, -3 - 18 - 8 = -29, 65 - 29 = 36$$

Neticede 36 adedi zuhur etti. Bunu 7 ile taksîm edersek bâkînin vâhid (1) olduğunu anlarız. 89463571 adedini daha basit bir hâle getirdikten sonra hakkında yapılan muamele icra edilirse daha kolaylık elde edilir. Bu adedi daha basit bir hâle vaz‘ etmek ise, bu adedi terkîb eden rakamlardan (7) adedine müsâvî veya bu adedi tecavüz eden rakamları; (7)nin mâ-dûnuna indirmek için bunlardan (7) adedi tarh edilmelidir. Şöyle yapmalı:

$$89463571 \equiv 12463501 \ (\text{muaddil } 7)$$

İşte şimdi bu: 12463501 hakkında da deminki kaideyi tatbik edersek, aynı neticeyi elde etmiş oluruz. İşte şöyle:

3 1	-2-3-1	2 3 1
12	463	501

$$1.1 = 1, 3.0 = 0, 2.5 = 10, -1.3 = -3, -3.6 = -18, -2.4 = -8, 1.2 = 2, 3.1 = 3$$

olur. Müsbetleri ayrı, menfileri de ayrı cem‘ edelim:

$$1 + 0 + 10 + 2 + 3 = 16,$$

$$-3 - 18 - 8 = -29$$

$$-29 + 16 \equiv -13 \ (muaddil\ 7)$$

(-13)e, muaddil olan (7)nin 2 mislini zam etsek:

$$-13 + 14 \equiv 1 \ (muaddil\ 7)$$

olup matlûba erişmiş oluruz.

29. Yukarda yapılagelen (7) adedi hakkındaki aynı usul ve muamele her aded hakkında da cârîdir. Fakat bunlar adeta her hesâb kitabında zikr ve beyan olunduğu için biz bunlardan sarf-ı nazar ederek bizim kendi bulduğumuz ve her aded hakkında cârî olan umumi bir kaidenin ispat ve tatbikatını vereceğiz. Biz bu usulü "Wroński" nam Lehli riyâzi-yi şehîrinin âsârından mülhem olarak bulduk. Pek güzel, pek elverişli bir usuldür.

Vakıa "Wroński" de bir usul vermiş ise de bunun usulü yalnız a'dâd-ı asliyye ile kâbil-i taksîm usulüdür ki, bu her aded hakkında cârî değildir. Bundan başka da taksîmden kalan bâkîyi veremez. Ancak kâbil-i taksîmin mümkün olup olmadığını gösterir ki, asıl, ekser ahvâlde matlûb olan bu değildir. En ziyade aranılan şey bâkîdir.

[Kâbiliyyet-i Taksîmin Kāide-i Külliyesi] / Benim Bulduğum Kaide

30. Umumi İspat: B adedi, ta'dâd ve terkîmde (10) yerine, bir sûret-i umûmiyyede kaide farz olunsun. Şu:

$$Bm \pm R$$

şekillerinde, her aded-i tâm veya o adedin herhangi bir misli dâhildir. Buna dair biraz izahat verelim:

Kaide (10) olduğuna göre yazılmış 37 adedini bu şekillerden birine – yani münasibine – ircâ için:

$$B = 10, m = 4, R = 3$$

farz edilerek, $(-)$ işareti de alınırsa,

$$37 = 40 - 3$$

olmuş olur ki, 37 adedi $Bm - R$ şekline ircâ edilmiş olur.

Kezalik, 33 veya 11 adedlerinin misli olan 99 adedini de bu şekillerden münasibine ircâ için:

$$B = 100, m = 1, R = 1$$

Ve şekillerdeki yine $(-)$ işareti alınırsa:

$$100 \times 1 - 1 = 100 - 1 = 99$$

olur. Ve hakeza, 23 adedi de: $23 = 20 + 3$ gibi bir şekle ifrağ edilir.

Şimdi, herhangi bir N adedinin olursa olsun bir d adedi üzerine taksîminden kalacak bakiyeyi bulmak matlûb olsun. Bu hâlde:

$$Bm \pm R$$

şekillerinden biri, ya o adedin yani d adedinin kendisine veyahut d adedinin herhangi bir misliyle bir bakiye mecmûu-u cebrîsine müsâvîdir. Herhâlde:

$$Bm \pm R \equiv 0 \ (muaddil\ d) \ \ldots (1)$$

müteâdili sahihtir.

Şimdi, N adedi:

$$a, b, c, e, \ldots, u$$

gibi erkâm-ı kesîreden ibaret bir adedi irâe etsin. Ta‘dâd ve terkîm kaidesi mûcibince, bu aded şöyle yazılır:

$$N = abce \ldots u$$

Bu adedin âhâd mertebesini işgal eden u rakamını ayırdıktan sonra kalacak sair bi'l-cümle aşerâtını (D) ile gösterelim. Bu hâlde bu adedi,

$$BD + u$$

ile irâe edebiliriz.

Şimdi, N adedinin d üzerine taksîminden kalacak olan meçhul bakiyyeyi r ile göstermiş olsak şu:

$$BD + u \equiv r\ (muaddil\ d)\ \ \ldots(2)$$

müteâdilini yazabiliriz.

Evvel-emirde, (1) münasebetinden yalnız $(+)$ işaretini alarak $(-)$yi şimdilik terk edelim. Ve (1) ile (2) münasebetlerini birbiri altına şöylece yazalım:

$$\left.\begin{aligned} Bm + R &\equiv 0 \\ BD + u &\equiv r \end{aligned}\right\}\ (muaddil\ d)$$

Bunlardan birinci müteâdili D ile, ikinciyi de m ile darb edersek:

$$\left.\begin{aligned} BDm + DR &\equiv 0 \\ BDm + um &\equiv rm \end{aligned}\right\}\ (muaddil\ d)$$

olur.

İkinci müteâdili birinciden tarh edelim:

$$RD - um \equiv -rm\ \ (muaddil\ d)$$

olur.

Burada $RD - um \equiv N'$ tefâzulü bir aded-i tâmdır. Ve asıl N adedinden küçüktür. Lakin eğer yine müteaddit rakamları hâvî büyücek bir aded ise, bu hâlde bu adedi de, daha küçük bir adede ircâ etmek lazımdır. Bunun için de yine yukardaki aynı usulü tekrar etmek icap eder. Yani şöyle:

N' adedinin âhâd rakamını u' ve bu rakam ifrâr edildikten sonra, kalan bi'l-cümle aşerâtını da D' ile irâe etsek, yine ber minvâl-i meşrûh:

$$\left.\begin{aligned} BD' + u' &\equiv -rm \\ Bm + R &\equiv 0 \end{aligned}\right\}\ (muaddil\ d)$$

yazarız ve bunlardan deminki gibi,

$$\left.\begin{array}{c} BmD' + u'm \equiv -rm^2 \\ BmD' + RD' \equiv 0 \end{array}\right\} (muaddil\ d)$$

müteâdillerini husûle getiririz. Birinci müteâdili ikinciden tarh edelim:

$$RD' - u'm \equiv rm^2 \quad (muaddil\ d)$$

olur. Ve yine

$$RD' - u'm \equiv N''$$

adedi de hem N den hem de N' adedlerinden küçüktür. Eğer bu aded de kâfi derecede küçük değilse, yukardaki usulün aynını takip ederek daha küçük bir aded bulunabilir. Yani, N'' adedinin âhâd rakamını u'' ve bu âhâd rakamı ayrıldıktan sonra kalan bi'l-cümle aşerât kısmını D'' ile irâe etsek:

$$\left.\begin{array}{c} BD'' + u'' \equiv rm^2 \\ Bm + R \equiv 0 \end{array}\right\} (muaddil\ d)$$

müteâdilleri tahaddüs eder. İşte tıpkı yukardaki gibi hareket edilerek:

$$RD'' - mu'' \equiv -rm^3$$

müteâdili husûle gelir.

Eğer bu tefâzulden hâsıl olan aded de matlûb-ı vech ile asgar değilse, aynı ameliyatı icra ederek, nihayet istenildiği kadar küçük bir aded elde edilebilir.

Şuna dikkat etmek lazımdır ki, her ameliyyenin neticesinde bir müteâdil elde ediliyor ki bunun birinci tarafı umumiyetle:

$$RD - mu$$

tefâzulünden, ikinci tarafı ise:

$$\pm rm^n$$

şeklinden ibarettir.

Bu son şekilde ise eğer n adedi [ki hem m adedinin üs rakamını, hem de ameliyatın adedini gösterir] zevc ise $(+)$ işareti, yok ferd ise $(-)$ işareti alınmalıdır.

Buraya kadar yapageldiğimiz ispat, (1) münasebetindeki $Bm \pm R$ şeklinin üst işaretini alarak vuku buldu. Eğer alt işareti olan $(-)$ işareti alınarak $(Bm - R)$ şeklini intihap edip de aynı ameliyatı icra eylemiş olsak, aynı neticelere – yalnız bir fark ile – dest-res oluruz. O fark da şudur; her ameliyenin neticesinde:

$$RD + mu \equiv rm^n \ \ (muaddil\ d)$$

şeklinde bir müteâdile tesadüf edilir ki, bunun diğerinden farkı, birinci tarafın ortasındaki işaretle sağ tarafın işareti her zaman $(+)$ olarak zuhur etmesinden ibarettir.

Mademki her ameliyyenin neticesinde şu:

$$RD + mu \equiv rm^n \ \ (muaddil\ d)$$

şeklinde bir müteâdil elde ediliyor; bu hâlde şöyle bir kāide-i külliye tezahür ediyor:

Kāide-i Külliye: Herhangi bir N adedinin olursa olsun, bir d adedi üzerine taksîminden kalacak bâkiyeyi bulmak için, evvel-emirde d adedini $(Bm \pm R)$ şekillerinden bir münasibine ircâ etmeli; sonra, N adedinin âhâd mertebesini işgal eden rakamı bir hat ile tefrik eylemeli; ba'dehu, N adedinin ifraz olunmuş bi'l-cümle aşerâtını R adediyle ve âhâd rakamını da m adediyle darb etmeli; birinci hâsıl-ı darbdan ikincisini tarh eylemelidir veyahut bu iki hâsıl-ı darbı cem‘ etmelidir. Eğer, $(Bm + R)$ şekli alınmış ise tarh ameliyyesi ve eğer $(Bm - R)$ şekli intihap olunmuş ise cem‘ ameliyesi icra edilmelidir. Her ameliyyede: $N, N', N'', \ldots$ adedleri yekdiğerinden küçük bir adede ircâ edilirler. İşte, bu minval üzere devam edilerek işe elverecek derecede asgar bir aded ve mesela bir P adedi elde edildiği gibi ameliyatın adedi ta‘dâd olunur. Farz edelim ki, ameliyat n kere tekrar etmiş bulunsun, bu hâlde:

$$\pm rm^n \equiv P\ (muaddil\ d)\ \ldots (3)$$

müteâdilini tesis ederek, eğer $(Bm - R)$ şekli alınmış ise $\pm rm^n$ ifadenin (+) işareti ve eğer $(Bm + R)$ şekli alınmış ise, üs n çift ise $(+)$, ferd ise $(-)$ işareti intihap olunur. Bu işaret hususu da bu vech ile tayin edildikten sonra (3) müteâdilinde meçhul olan r bakiyyesi halledilerek, N adedinin d üzerine taksîminden kalan bakiyye bulunmuş olur.

Tatbikat

31. Misal: 6793 adedinin 43 adedi üzerine taksîminden kalacak bakiyeyi bulmak matlûb olsun.

$Bm + R$ şeklinde, $B = 10, m = 4, r = 3$ farz edilirse bunlar şekilde yerine vaz‘ ile:

$$4.10 + 3 = 43$$

Bunları nazar-ı dikkate aldıktan sonra, şu aşağıda tarzda ameliyata devam olunur:

$$m = 4$$

$$R = 3$$

```
 679|3
   3|4
──────────
2037
  12
──────────
 202|5
   3|4
──────────
 606
  20
──────────
  58|6
   3|4
──────────
 174
  24
──────────
  15|0
   3|4
──────────
  45
   0
──────────
  45
```


Burada ameliyatın kaç defa tekrar ettiğini bilmek için âhâdleri ayıran hutût-ı şâkuliyyeyi saymak kâfidir. Burada bunlar 4 tanedir. Bu hâlde aded-i ameliyat çifttir. Öyle ise şu:

$$4^4 r \equiv 45 \quad (muaddil\ 43)$$

müteâdilini halletmek lazımdır. O da şöyle hallolunur:

$$256r \equiv 45 \quad (muaddil\ 43)$$

Veyahut:

$$-2r \equiv 2 \quad (muaddil\ 43)$$

Veyahut:

$$r \equiv -1 \ \equiv 42\ (muaddil\ 43)$$

olup matlûb olan bâkînin 42 adedinden ibaret olduğu tebeyyün etmiş olur.

32. **Tembih:** Pek bedihidir ki, herhangi bir N adedinin olursa olsun, bir d adedi üzerine taksîminden kalacak bâkîyi tayin etmek için N adedini doğrudan doğruya d adedi üzerine taksîm etmek şu yapageldiğimiz ameliyattan daha kısa ve daha kolaydır. Lakin bir kere bu umumi ispat yapılıp takarrür ettikten sonra, $Bm \pm R$ şekillerinde bazı ta'dilât icra ederek gayet sehl, gayet müfîd ve gayet şümullü usuller bulmak mümkündür.

Şurasını da mühim olarak beyan edelim ki, kâbiliyyet-i taksîm bahsinde 2 ile 5 adedlerini asla nazar-ı itibara almayacağız. Çünkü bunlar hakkında kâbiliyyet-i taksîm pek basittir.

Bu iki adedi bertaraf ettikten sonra, geriye yalnız tek adedler kalır ki, bunlar da şu:

$$1, 3, 7, 9$$

adedleriyle müntehidirler. Bu hâlde:

$$Bm \pm R$$

şekillerinde

$$B = 10, 10^2, 10^3 \dots$$

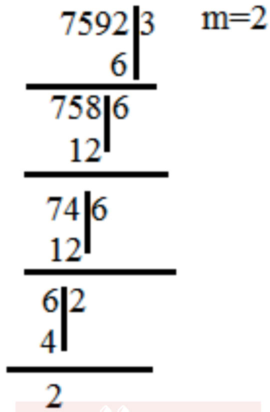
Yani 10 adedinin kuvvetleri farz edilip R adedi de (1) tasavvur olunsa, yukardaki şekiller evvel-emirde $(10m \pm 1)$ şekillerine ircâ edilir. Şimdi bir iki misal tatbik ederek bundan evvelki ameliyatın ne derecede hafifleştiği anlaşılır. Bundan sonra da yine daha basit şekillerle, ameliyatı büsbütün tahfif edeceğiz.

Yalnız şurasını söyleyeyim ki, deminden erkâm-ı ferdiyye-i müş'ire şunlardan: $1, 3, 7, 9$ ibarettir (5 adedini bertaraf ediyoruz) demiş idik. 1 ile 9 adedleri $10m \pm 1$ şeklinde dâhildir. Yani m aded-i tâmmı ne olursa olsun, nihayeti sıfır ile müntehi olduğundan, eğer $(+)$ işaretini alırsak, bir aded zuhur eder ki, nihayeti vâhidden ibarettir. Eğer $(-)$ işaretini alırsak 9 ile müntehi bir aded elde etmiş oluruz. Bu takdirce herhâlde 1 veya 9 ile müntehi adedler husûle getirmek pek kolaydır.

Şimdi 3 ve 7 rakamlarıyla müntehi adedler kaldı ki, böyle adedleri de nihayeti 1 veya 9 rakamlarıyla müntehi adedlere tahvil etmek pek kolaydır. Şöyle ki: 3 ile müntehi bir adedi 3 ile darb edersek 9 ile müntehi bir adede tahvil etmiş oluruz. Mesela 13 adediyle kâbiliyyet-i taksîm taharrî etmek matlûb olsun. Biz $3.13 = 39$ adedini alır muamelâtı 39 adedi üzerine yaparız. Veyahut $7.13 = 91$, 91 adediyle muamelâtı icra ederiz. Kezalik, 17 adediyle kâbiliyyet-i taksîm taharrîsinde yine $3.17 = 51$ veya $7.17 = 119$, yani 51 veya 119 adedleriyle muamelâta girişiriz. Bu sebepten herhâlde her ferd adedi $(10m \pm 1)$ şekillerinden birine ircâ edebiliriz.

Misal 1: Farz edelim ki, 75923 adedinin (7) adedi üzerine taksîminden kalacak bâkîyi bulmak matlûb olsun. Şöylece yapmalı:

$3.7 = 21$ olur. Şeklimizi de yazalım: $10m + 1$ burada (+) işareti alınacaktır. $m = 2$ farz edilince şekilde 21 adedi zuhur eder. Şimdi (m)nin müsâvîsi olan 2'yi nazar-ı dikkate alarak ameliyata başlıyorum:



Buradaki şakuli çizgiler (4) defa ameliyat yapıldığını gösteriyor. Bu hâlde;

$$2^4 r \equiv 2 \ \ (muaddil\ 7)$$

Yahut:

$$16r \equiv 2 \ \ (muaddil\ 7)$$

Burada $(muaddil\ 7)$nin iki misli olan 14 adedini (16)dan tarh ediyoruz ki caizdir. (Müteâdiller bahsine müracaat).

$$2r \equiv 2 \ \ (muaddil\ 7)$$

Yahut:

$$r \equiv 1 \ \ (muaddil\ 7)$$

olup bâkînin 1'den ibaret olduğu anlaşılmış olur.

Misal 2: 279359 adedinin 29 adedi üzerine taksîminden kalacak bâkîyi bulmak matlûb olsun. Şöyle yapmalı:

$$
\begin{array}{r|l}
27935 & 9 \\
27 & \\
\hline
2796 & 2 \\
6 & \\
\hline
280 & 2 \\
6 & \\
\hline
28 & 6 \\
18 & \\
\hline
46 &
\end{array}
$$

$$10m - 1$$

$$m = 3$$

$$3^4 r \equiv 46\ (muaddil\ 29)$$

Yahut:

$$81r \equiv 46\ (muaddil\ 29)$$

Yahut:

$$81r \equiv 46 + 29 \equiv 75\ (muaddil\ 29)$$

Yahut:

$$27r \equiv 25\ (muaddil\ 29)$$

Veyahut:

$$27r - 29r \equiv 25 - 29$$

Veyahut:

$$-2r \equiv -4$$

Veyahut:

$$r \equiv 2\ (muaddil\ 29)$$

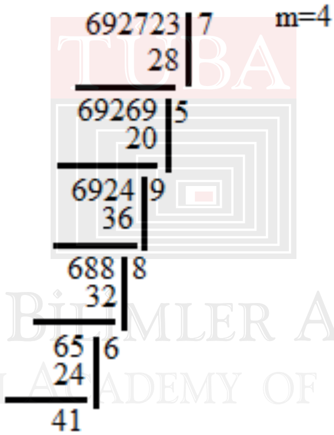
olup bâkînin (2) olduğu bilinmiş olur.

Misal 3: 6927237 adedinin 41 adedi üzerine taksîminden kalacak bâkîyi bulmak matlûbdur?

Burada, $m = 4$'tür.

$$10.4 + 1 = 41$$

Öyle ise şöyle hareket etmelidir:



Burada son bâkî: 41'dir.

Öyle ise 6927236 adedi (41) ile tamamen kâbil-i taksîmdir. Çünkü kaidemiz mûcibince şu:

$$-4^5 r \equiv 41 \; (muaddil\ 41)$$

müteâdilini halletmek için evvel-emirde bu müteâdilin sağ tarafındaki 41 adedinden *muaddil* (41) adedi tarh edilse:

$$-1024 r \equiv 0 \; (muaddil\ 41)$$

olur.

Tarafeyni (-1) ile darb etsek:

$$1024r \equiv 0 \ (muaddil\ 41)$$

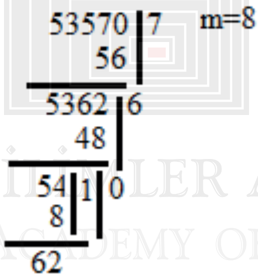
olup 1024 adedi (41) ile mütebâyin olduğundan tarafeyni 1024 ile taksîm etsek:

$$r \equiv 0 \ (muaddil\ 41)$$

olur ki bunun manası r bâkîsi (41) üzerine taksîm edilse, hiçbir şey artmaz. Yani r, (41) ile kâbil-i taksîmdir.

Misal 4: 535707 adedinin (79) adedi üzerine taksîminden kalacak bâkîyi bulmak matlûb olsun.

Bundan evvelki misallerde olduğu gibi hareket etmelidir:



$$8^4 r \equiv 62 \ (muaddil\ 79)$$

Yahut:

$$4096r \equiv 62 \ (muaddil\ 79)$$

Veyahut:

$$2048r \equiv 31 \ (muaddil\ 79)$$

Veyahut:

$$73r \equiv 31 \ (muaddil\ 79)$$

Veyahut:

$$-6r \equiv 48 \ (muaddil \ 79)$$

Ve nihayet:

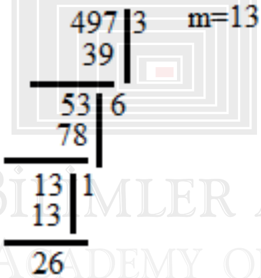
$$r \equiv 8 \ (muaddil \ 79)$$

olup bâkînin 8 olduğu anlaşılmış olur.

Bir misal daha yaparsak, iyice tavzîh-i merâm etmiş olacağız.

Misal 5: Farz edelim ki, 3973 adedinin (43) adedi üzerine taksîminden kalacak bâkîyi bulmak matlûb olsun.

Burada $43.3 = 129$ olup, $m = 13$ olur.



$$13^3 r \equiv 26 \ (muaddil \ 43)$$

Yahut:

$$2197r \equiv 26 \ (muaddil \ 43)$$

Yahut:

$$47r \equiv 26 \ (muaddil \ 43)$$

$$4r \equiv 26 \ (muaddil \ 43)$$

$$2r \equiv 13 \ (muaddil \ 43)$$

$$2r \equiv 56 \ (muaddil \ 43)$$

En nihayet:

$$r \equiv 28\ (muaddil\ 43)$$

olup matlûb olan bâkînin (28) olduğu anlaşılmış olur.

Bu usulü daha hafifleştirmek, daha basit bir hâle koymak için şöyle yapacağız:

$$B = 10, 10^2, 10^3, 10^4, \dots, 10^n$$

Yani, kaideyi (10) ve (10)un kuvvetleri farz edelim. Bununla beraber de:

$$R = 1, m = 1$$

müsâvîlerini tasavvur eyleyelim:

Bir kere burada $R = 1, m = 1$ olduğundan ve (m)nin yani vâhidin herhangi kuvvete ref'i olursa olsun yine vâhide müsâvî olduğundan, bu takdirce (3) ile irâe olunan şu:

$$rm^n \equiv \pm p\ \ (muaddil\ d)$$

müteâdili ortadan kalkmış olur. Ve şu cetvel vücuda gelir:

	Şekiller	***Adedler***	***Kâsımlar***
1	*10m+1*	*11*	*11*
2	*10m-1*	*9*	*3, 9*
3	*100m+1*	*101*	*101*
4	*100m-1*	*99*	*3, 9, 11, 33, 99*
5	*100m+1*	*1001*	*7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001*
6	*1000m-1*	*999*	*3, 9, 27, 37, 111, 333, 999*

Yukarda yapılan ispat ile bunun tavzihi için getirilen misaller iyice nazar-ı dikkate alınırsa bu cetvelin anlaşılması için hiç de güçlük çekilmezse de, biz buna dair bazı izahat verelim:

Evvel-emirde, yine tekrar ederek söyleyelim ki, $(10m \pm 1)$ şekillerinde $(10m + 1)$ alınırsa, ameliyat tarh ile, $(10m - 1)$ intihab olunursa cem‘ ile icra edilir. Şimdi gelelim izahata:

1’inci şekil: $(10m + 1)$ olup burada ve bundan böyle cetvelin her yerinde $m = 1$ farz edildiğinden $(10m + 1) = 11$ olup kaide (10) olduğundan maksûm olan adedin her rakamına birer birer tarh ile muamele edilecektir.

Misal 1: Farz edelim ki, 786329 adedinin 11 üzerine taksîminden kalan bâkîyi bulmak matlûb olsun.

Bu husus üç türlü kâbil-i hâldir. Çünkü cetvele bakınca: birinci, dördüncü ve beşinci hanelerin kâsımları meyanında (11) adedine tesadüf olunur.

Birinciye göre şöyle muamele edilir:

```
78632|9    m=1
    9|
---------
 7862|3
    3|
---------
  785|9
    9|
---------
   77|6
    6|
---------
    7|1
    1|
---------
   -6
```

Burada çizgiler 5 adeddir. Yani beş ameliyat icra edildiğinden 6 bâkîsi $(-)$ işaretini alır ki, buna muaddil (11)in bir misli zam edilse $-6+11=5$ olup bâkînin 5'ten ibaret olduğu anlaşılır ki bu kaide bütün hesâb kitaplarında şu kaidenin aynıdır:

"Bir adedin 11 adedi üzerine taksîminden kalan bâkîyi bulmak için şöyle yapmalıdır: Adedin tek hane rakamları mecmûundan, çift hane rakamları mecmûunu tarh etmeli: hâsıl-ı tarh kalan bâkîdir. Eğer çift rakamları mecmûu, tek rakamlar mecmûundan büyük ise, bâkî $(-)$ tarafından kalır ki bunu müsbet yapmak için (11)in lüzumu kadar emsali buna zam olunur."

4'üncü sütundaki görülen (11) adedine göre şöyle icrâ-yı amel olunur.

Bu sütundaki şekil: $100m-1$ olduğundan burada kaide (100)'dür. Yani her iki rakam bir rakam gibi telâkki olunmalıdır. Bu hâlde adedin sağdan sola doğru ikişer rakamını birer hat ile ifraz etmeli ve bunları birbiri altına yazarak cem' eylemeli ve iki rakam kalıncaya kadar ameliyata devam etmelidir. Yani şöyle yapmalıdır:

$$\begin{array}{r|r|r} 78 & 63 & 29 \\ & & 63 \\ & & 78 \\ \hline & 1 & 70 \\ & & 1 \\ & & 71 \end{array}$$

Şimdi şu (71)den (11)in en yakın misli olan 66 adedi tarh edilse:

$$71-66=5$$

kalır ki, işte bu 5 adedi aranılan bâkîden ibarettir.

5’inci sütundaki görülen 11 adedine göre de şöyle muamele icra olunmalıdır. Buradaki şekil: $1000m + 1$ dir. Bunda kaide 1000’dir. Yani her üç rakam bir rakam yerine kāimdir. Bunun için verilen aded, sağdan sola doğru üçer üçer ifraz edilmeli ve birinci kısmın üstüne $(+)$, ikinciye $(-)$ velhâsıl tek kısımlar üstüne $(+)$, çift kısımlar üstüne $(-)$ işaretleri vaz‘ edilerek müsbetler mecmûundan menfiler mecmûunu tarh etmelidir. Hâsıl-ı tarhı (11) adedi üzerine taksîm eylemeli; tefâzul bâkîyi göstermiş olur. Şöyle yapmalı:

Mesela: 89257631 adedinin (11) üzerine taksîminden kalacak bâkîyi bulmak matlûb olsun.

$$
\begin{array}{c|c|r}
+ & - & + \\
89 & 257 & 631 \\
 & & +89 \\
\hline
 & & +720 \\
 & & -257 \\
\hline
 & & +463
\end{array}
$$

Görülüyor ki, bu ameliyattan sonra: 463 adedi hâsıl oldu. Bunu (11) üzerine taksîm edersek veya daha iyisi 11 hakkında yukarda yapmış olduğumuz ikinci kaideyi tatbik edersek:

$$
\begin{array}{c|r}
4 & 63 \\
 & 4 \\
\hline
 & 67
\end{array}
$$

olur. Bu (67)nin (11) üzerine taksîminden (1) kalır ki, işte aranılan bâkînin vâhidden ibaret olduğu anlaşılmış olur.

Tembih: Her hesâb kitabında (11) adedi için, bizim burada birinci olarak gösterdiğimiz kaide beyan olunmuştur. Hâlbuki bizim ikinci kaidemiz herhâlde birinciye, gerek sühûlet cihetiyle, gerekse yalnız cem‘ ameli ile yapıldığından menfilik külfetinden azade olmak haysiyetiyle müreccahtır.

Bir misal de 6’ıncı sütundaki adedler için tatbik edelim:

Farz edelim ki: 8976317 adedinin:

$$3, 9, 27, 37, 111, 333, 999$$

adedlerinden beheri üzerine taksîminden kalacak bâkîleri bulmak matlûb olsun.

Cetvelde 6’ncı hatt-ı ufkî hizasında: $(1000m - 1)$ şekline bakılırsa, bu adedlerin kâffesi orada görülür. Bu şekilde kaide (1000) olduğundan, 8976317 adedi sağdan sola doğru üçer üçer ayrılmalı ve bu kısımlar cem‘ edilmelidir. Şöyle yapmalı:

$$\begin{array}{r|r|r} 8 & 976 & 317 \\ & & 976 \\ & & 8 \\ \hline & 1 & 301 \\ & & 1 \\ \hline & & 302 \end{array}$$

Aşikârdır ki, bu 8976317 adedinin 333, 999 adedleri üzerine taksîminden kalan bâkî 302 adedidir. Çünkü bu aded 333 ve 999 adedlerinin beherinden küçüktür. Bunlardan sonra:

$$3, 9, 27, 37, 111$$

adedleri kalır ki, aded-i mefrûzun bu adedler üzerine taksîmiden kalan bâkîleri bulmak için 302 adedini bu adedler üzerine sırasıyla taksîm edersek bâkîler de sırasıyla şunlardan ibaret olarak bulunurlar:

$$2, 5, 5, 6, 80$$

Misal: 9635247 adedini:

$$7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001$$

adedleri üzerine taksîmlerinden kalacak bâkîleri bulmak matlûbdur.

Burada (1001) adedi: $(1000m + 1)$ şeklindedir. $m = 1$'dir. Bu hâlde şu aşağıdaki gibi hareket etmelidir:

$$\begin{array}{r|r|r} + & - & + \\ 9 & 635 & 247 \\ & 256 & +9 \\ \hline & -379 & \end{array}$$

Görülüyor ki, burada zâidler mecmûu: 256 adedine müsâvîdir. Bunu menfi olan (−635) adedinden tarh ediyoruz, geriye; (−379) adedi kalıyor; şimdi bu: (−379) adedini:

$$7, 11, 13, 77, 91, 143$$

adedlerinden beheri üzerine taksîm ederek ve hâric-i kısmetleri vâhid fazlasına alarak [Çünkü 379 menfidir. Hâlbuki bâkîler müsbet olmak lazımdır], müteakiben şu bâkîleri elde etmiş oluruz ki, doğrudur:

$$6, 6, 11, 6, 76, 50$$

Aded-i mefrûzun (1001) üzerine taksîminden kalan bâkîyi bulmak için ise (−379) adedine (1001) adedini zam etmek kâfidir.

$$1001 - 379 = 622$$

Tembih: Yukardaki cetvelin 5'inci hatt-ı ufkî hizasına bir göz gezdirilecek olursa birçok adedler meyanında 7 ile 13 adedlerinin aynı usul ve kaideye tâbi oldukları görülür.

Yani bu iki adedlerle bir adedin taksîminden kalacak bâkîleri bulmak için burada kaide (1000) olduğundan, adedi sağdan sola doğru üçer üçer kısımlara ayırmalı ve birinci kısmın [sağdan bed‘ ile sola doğru] üstüne (+), ikinci kısmın üstüne (−) …ilh münavebeten biri (+), biri (−) işaretlerini koymalı; ba‘dehu bunları işaretleri mûcibince ıslah etmeli; son neticeyi, (7 ile kâbiliyyet-i taksîm matlûb ise) 7 üzerine, yok 13 ile kâbiliyyet-i taksîm murad olunuyorsa 13 üzerine taksîm eylemeli; bu taksîmlerden kalacak bâkîler matlûb bakîlerden ibarettir.

Misal: Farz edelim ki 14447023835391 adedinin, 7 ve 13 üzerine taksîmlerinden kalacak bâkîleri bulmak matlûb olsun. Şöyle yapmalı:

```
 +    −     +     −     +
14 | 447 | 023 | 835 | 391
   | -835|     |     | +23
   |     |     |     | +14
   ------              -----
  −1282                +428
   +428
  ------
   −854
```

Netice (−854) zuhur etti; yani zâidler mecmûu ile nâkıslar mecmûu ile nâkıslar mecmûunu yekdiğerinden tarh ettik, menfiler müsbetlerden a‘zam olduğu için menfi olarak (−854) zuhur etti. Şimdi bu adedi 7 üzerine taksîm edersek bâkîyi sıfır buluruz ki, aded-i mefrûzun 7 ile kâbil-i taksîm olduğu anlaşılır.

Ve yine −854 adedini 13 üzerine taksîm ederek hâric-i kısmeti de vâhid fazlasına verirsek (4) adedini bulmuş oluruz ki, filhakika da bu (4) adedi matlûb bâkîden ibarettir.

***

İhtar: Yukardan beri bi’l-isbât (misalleriyle) zikr ve beyan edegeldiğimiz (kâbiliyyet-i taksîm) kâide-i külliyyesini iyice tefehhüm edenlerin, bu husus için başka kavâide lüzum hissetmeyecekleri gibi, bu kaidenin herhangi bir ferd adedi için olursa olsun kâbil-i tatbîk olduğu da nazar-ı itibara alınırsa, bu kaidenin gayet şümullü ve umumi olduğu tezahür etmiş olur.

Kariîn-i kirâmın bundan pek çok istifade edecekleri şüphesizdir. Bu istifadelerini, ben duydukça, işittikçe pek büyük bir hiss-i iftihârla mütehassıs olacağım tabîîdir.

Nasıl bir hiss-i iftihârla mütehassıs olmayayım ki, bu çetin ve fakat ilm-i a‘dâdda en mühim rol icra eden ve pek ziyade kullanılan böyle bir kaidenin kâşifiyim.

***

İhtar: (Kâbiliyyet-i taksîm) ser-namesi altında da beyan ettiğimiz gibi, burada da tekrara lüzum gördüğümüz pek mühim bir madde şudur:

Bu bahis, yani kâbiliyyet-i taksîm bahsi, [Müteâdiller - Congruences] nazariyyesinden sonra tedris edilmelidir ki, layıkıyla anlaşılabilsin. Biz programdaki sırayı bozmadık; onu takip ettik. Yoksa, evvel-be-evvel müteâdiller bahsini ve sonra da kâbiliyyet-i taksîm nazariyyesini yazmayı tercih ederdik. Ve mantıkî hareket de bu idi.

***

Beşinci Fasıl

Şeklî Adedler

33. Bir N adedi, kendisiyle vâhidden başka hiçbir adedle kâbil-i taksîm değilse, böyle adede "aded-i aslî" derler. İşte şu:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29 \ldots$$

adedleri aslîdir.

34. Aslî olmayan her aded mürekkebdir. Ve böyle bir aded, diğer bazı a'dâd ile kâbil-i taksîmdir:

$$4, 6, 8, 10, \ldots, 15, 16, 18, 20, 22, \ldots$$

adedleri mürekkeb adedlerdir.

Mürekkeb bir adedin en küçük kâsımı, bir aded-i aslîdir. Zîrâ eğer N aslî bir aded değilse, bir N_1 adedi ile kâbil-i taksîmdir. Bu aded de 1 ile N arasındadır. Yani vâhidden büyük, N'den küçüktür. Eğer N_1 adedi aslî değilse, bu da bir $N_2 > 1$ adediyle kâbil-i taksîmdir. Ve bu N_2 adedi, N adedinin de kâsımıdır. Zîrâ, eğer N adedi N_1 adediyle kâbil-i taksîm ise $N = N_1.q$ münasebeti mevcuttur. Ve eğer N_1 adedi N_2 adedi ile kâbil-i taksîm ise $N_1 = N_2.q'$ ve bu cihetle $N = N_2.q.q'$ müsâvâtı hâsıldır.

Eğer N_2 adedi de aslî değilse, diğer bir $N_3 > 1$ adediyle kâbil-i taksîmdir. İşte bu minval üzere devam edilirse nihayette bir N_n aded-i aslîsine tesadüf edileceği şüphesizdir ki işte bu aded, aded-i mürekkebin en küçük kâsımı ve aslî bir kâsımıdır.

35. Silsile-i a‘dâd-ı asliyye nâ-mahduddur.

Şimdi, biz ne kadar a‘zam olursa olsun bir N aded-i aslîsi verildiği hâlde, bundan daha büyük bir aded-i aslînin mevcut olduğunu ispat edeceğiz. $P(N)$ rumuzuyla yekdiğerine madrûb 2 adedinden itibaren N aded-i aslîsine kadar bi’l-cümle a‘dâd-ı asliyye hâsıl-ı darbını irâe edelim. Yani şöyle:

$$P(N) = 2.3.5.7.11 \dots N \qquad [H]$$

Ve: $P(N) + 1$ ifadesini tasavvur edelim.

Bu ifade: $2, 3, 5, \dots, N$ a‘dâd-ı asliyyesinden hiçbiriyle kâbil-i taksîm değildir. Çünkü eğer bunlardan mesela N’den küçük bir d aded-i aslîsiyle kâbil-i taksîm ise, bu hâlde bu aded $[H]$ silsilesindeki adedlerden biri olacağı cihetle $P(N)$’i tamamen taksîm eder.

$P(N)$ ve $P(N) + 1$ ifadelerini tamamen taksîm eden d adedinin, bunların tefâzulü olan 1’i de taksîm etmesi lazım gelir ki bu muvafık-ı hakîkat değildir.

Bu hâlde eğer $P(N) + 1$ aded-i aslî ise, da’vamız sübut bulur. Çünkü bu aded N adedinden a‘zamdır. Yok, bu aded aslî değilse, bunun bir kâsımı ve en küçük bir kâsımı vardır ki, bu da aslîdir. Bu aslî kâsımın herhâlde N adedinden büyük olması iktiza eder. Bu takdirce N aded-i aslîsi ne kadar a‘zam olursa olsun, bundan büyük diğer aslî bir aded mevcuttur. Bu sebepten silsile-i a‘dâd-ı asliyye nâ- mahduddur.

36. Ekseriyetle, silsile-i a‘dâd-ı tabîiyyede a‘dâd-ı asliyyeye pek nadir olarak tesadüf olunur. 1’den 1000 adedine kadar (bunların içinde 1 dâhil değildir) 168 a‘dâd-ı asliyyeye tesadüf olunur. 1000 ile 2000 arasında 135, kezalik, 199000 ile 200000 arasında 77 ve keza 10000000 adedi ile 10001000 adedi meyanında 71, 10^8 ile $10^8 + 1000$ adedleri arasında 54 ve keza 10^9 ile $10^9 + 1000$ adedleri meyanında 49 a‘dâd-ı asliyye mevcuttur.

Şimdiye kadar malum olan a‘dâd-ı asliyye cetvelleri nihayet (10017000) adedine kadar gidebilmiştir. Bu cetveller de [Lehmer] cetvelleridir.

37. Pek çok zamandan beri, yalnız a‘dâd-ı asliyyeyi veya bunlardan bazılarını verir düsturlar bulmak meselesiyle dühât-ı riyâziyyûn uğraşmışlardır. Bu dühât meyanında [Euler], sırf a‘dâd-ı asliyye verir bir zû-hudûd-u kesîre-i cebriyyenin mevcut olmadığını ispat etmiştir.

[Fermat], bu meselenin halli şu: $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ düsturuyla mümkündür zannetmişti. Bu düstur sırasıyla şu adedleri veriyor:

$$n = 0 \dots . F_n = 3$$

$$n = 1 \dots . F_n = 5$$

$$n = 2 \dots . F_n = 17$$

$$n = 3 \dots . F_n = 257$$

$$n = 4 \dots . F_n = 65537$$

F_n’nin bütün bu kıymetleri aslî adedlerdir. Bundan dolayı Fermat bu yukardaki düstur şeklinde olan a‘dâdın kâffesi aslîdir zehabına düşmüş idi. Hâlbuki Euler bu düsturda $n = 5$ olduğuna göre:

$$F_5 = 641 \times 6700417$$

olduğunu ispat ederek yukarıki zehabı iptal etmiştir.

O zamandan beri Fermat'nın bu iddiasının yanlış olduğunu ispat eden birçok neticeler daha elde edilmiştir.

Bazı kere bir takım a'dâd-ı asliyye veren zû-hudûd-ı kesîre bulunmuştur. İşte mesela şunlar gibi:

$$x^2 + x + 41, \quad 2x^2 + 29, \quad x^2 + x + 17$$

38. Eğer iki adedin müşterek madrûbları olmazsa bunlara (mütebâyin adedler) denir.

14 ve 15, kezalik $2^n - 1$ ve $2^n + 1$ adedleri mütebâyindirler. Eğer N adedi aslî ise, kendinden büyük olup kendinin taksîm etmediği bütün a'dâd ile ve kendisinden küçük bütün adedlerle mütebâyindir.

İki adedin en büyük kâsımı, onların kâsım-ı müşterek-i a'zamıdır. A ve B gibi iki adedin kâsım-ı müşterek-i a'zamı şu: $D(A, B)$ rumuzuyla gösterilir. İki adedin kâsım-ı müşterek-i a'zamlarının her kâsımı, o iki adedin de kâsım-ı müşterekleridir. Bu da şu: $d(A, B)$ rumuzuyla irâe olunur.

A'dâd-ı mütebâyinenin kâsım-ı müşterek-i a'zamları (1) vâhiddir.

İki adedden asgarı, a'zamını tamamen taksîm ederse, bunların kâsım-ı müşterek-i a'zamları aded-i asgardır:

$$D(A, KA) = A$$

Herhangi iki aded-i tâmmın olursa olsun, kâsım-ı müşterek-i a'zamı o iki adedin taksîminden zuhur eden bâkî ile aded-i asgar, kâsım-ı müşterek-i a'zamına müsâvîdir. Yani:

$$(B > A) \quad B = Aq + R$$

olsa bundan şu:

$$D(A, B) = D(A, R)$$

olur.

İşte bu kaziyyeden neşet ediyor ki, kâsım-ı müşterek-i a‘zam algoritmasıyla küsûrât-ı mütevâliye algoritması birbirinin aynı oluyor.

Bir Adedin Kâsımları

39. Bir adedin bütün kâsımlarını bulmak matlûbdur.

Bir N adedini ve onun şöylece

$$N = a^{\alpha}.\, b^{\beta}.\, c^{\gamma} \ldots f^{\lambda}$$

madrûbat-ı asliyyeye tefrikini farz edelim.

Şu aşağıdaki cetveli tasavvur edelim:

$$\left.\begin{array}{cccccc} 1 & a & a^2 & a^3 & \ldots & a^{\alpha} \\ 1 & b & b^2 & b^3 & \ldots & b^{\beta} \\ 1 & c & c^2 & c^3 & \ldots & c^{\gamma} \\ & & & \ldots & & \\ 1 & f & f^2 & f^3 & \ldots & f^{\lambda} \end{array}\right\} [1]$$

Şimdi cetvelin birinci hatt-ı ufkîsinde bulunan adedlerin her birini, ikinci hatt-ı ufkînin her biri ile darb ve bu hâsılı üçüncü hattın her bir adediyle … ve ilh. darb edecek olsak nihayet N adedinin bi’l-cümle kâsımlarını bulmuş oluruz[4].

---

[4] Bunların ispatları klasik ilm-i hesâb kitaplarının hepsinde vardır. Biz burada hülâsalarını beyan ediyoruz.

40. Bir adedin kâsımlarının adedini yani bir adedin kaç tane kâsımı olduğunu bulmak matlûbdur.

(1) ile irâe olunan cetvele müracaat edilirse görülür ki birinci hatt-ı ufkîde $\alpha + 1$ aded vardır. Sonra bu adedlerden her biri, ikinci hatt-ı ufkînin hâvî olduğu $\beta + 1$ adedlerle darb edildikte $(\alpha + 1).(\beta + 1)$ aded husûle gelir. Sonra bu hâsıl-ı darbın her adedi de, üçüncü hatt-ı ufkînin hâvî olduğu $(\gamma + 1)$ kadar adedle darb edildikte:

$(\alpha + 1).(\beta + 1).(\gamma + 1)$ aded husûle gelir.

Ve bu minval üzere devam edilirse nihayette N adedinin kâsımlarının şu:

$$(\alpha + 1).(\beta + 1).(\gamma + 1) \ldots (\lambda + 1)$$

kadar adedden ibaret olduğu anlaşılmış olur.

Kaide: Bir adedin kaç tane kâsımı olduğunu bilmek için o adedin her madrûb-ı aslîsi üssüne vâhid zam edip bunlar yekdiğeriyle darb edilmelidir.

41. Bir adedin kâsımlarının mecmûunu bulmak. Yine biz yukardaki:

$$N = a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma} \ldots f^{\lambda}$$

adedini nazar-ı itibara alalım. Bu hâlde (1) ile gösterilen cetvele müracaat ederek bu cetvelde bulunan her hatt-ı ufkînin adedlerini cem‘ edelim. Şöyle olur:

$$\begin{gathered} 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{\alpha} \\ 1 + b + b^2 + b^3 + \cdots + b^{\beta} \\ 1 + c + c^2 + c^3 + \cdots + c^{\gamma} \\ \ldots \\ 1 + f + f^2 + f^3 + \cdots + f^{\lambda} \end{gathered}$$

Bundan sonra bu elde edilen kemmiyyetleri yekdiğeriyle darb edersek şu olur.

$$(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^\alpha).\left(1+b+b^2+b^3+\cdots+b^\beta\right)\ldots(1+f+f^2+f^3+\cdots+f^\lambda)$$

Her parantez içindeki ifade bir silsile-i hendesiye olduğundan bunların hâsılı şu olur:

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\times\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\times\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\times\ldots\times\frac{f^{\lambda+1}-1}{f-1}$$

42. Bir adedin kâsımlarının hâsıl-ı darbını bulmak.

Bir n adedinin bi'l-cümle kâsımları:

$$1, d, d', \ldots, n \qquad [2]$$

adedleri olsun. Bu kâsımların tamâmîsi de:

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{d}, \ldots, \frac{n}{n} \qquad [3]$$

olsun. Bu [3] ile gösterilen silsilenin hâvî olduğu adedler tamamen [2] silsilesinde de mevcuttur. Bu hâlde bu iki silsile mademki aynı a'dâdı hâvîdir; bunların hâsıl-ı darbları (P) ile gösterilmiş olsa şu ifadeler sahihtir:

$$P = 1.d.d' \ldots n$$

$$P = \frac{n}{1}.\frac{n}{d}\ldots\frac{n}{n}$$

Bu hâsıl-ı darbların beherinde $(\alpha+1).(\beta+1)\ldots(\lambda+1)$ madrûbun bulunduğu nazar-ı dikkate alınarak bu iki silsile yekdiğeriyle darb edilse:

$$P^2 = n^{(\alpha+1).(\beta+1)\ldots(\lambda+1)}$$

Yahut:

$$P = \sqrt{n^{(\alpha+1).(\beta+1)\ldots(\lambda+1)}}$$

olur.

Meczûrun üssü olan $(\alpha + 1).(\beta + 1)\ldots(\lambda + 1)$ hâsıl-ı darbının madrûblarından hiç olmazsa biri çifttir. Bu sebepten P adedi muntaktır.

A'dâd-ı Müsellesiye / Nombres triangulaires

43. Şu aşağıdaki a'dâd-ı tâmmenin silsile-i tabîiyyesini tasavvur edelim:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \ldots$$

Bu silsilenin birinci haddi olan vâhidden (vâhid de dâhil) bed' ile istenildiği kadar hudûd-ı müteâkibe cem' edilse ve mesela 5 aded-i tâmm-ı müteâkibin mecmûu alınsa bu mecmûu 15 adedinden ibarettir. Bu 15 adedi gibi husûle gelen her aded merâk-âver safhaları hâvîdir.

Başlıca hassaları: Bunların âhâdi muntazam surette nokta nokta tanzim edilebilir ki bunlardan mütesâvi'l-adlâ müsellesler husûle gelir. Mesela şu 15 adedi şöylece bir müselles husûle getirir:

İşte bu hassadan dolayı bu gibi a'dâda [a'dâd-ı müsellesiye] namı verilmiştir. A'dâd-ı müsellesiye yukarda dediğimiz gibi a'dâd-ı tâmme silsile-i tabîiyyesinin birinci haddinden itibaren sırasıyla a‘dâd-ı müteâkibenin cem‘inden hâsıl olur.

Bu tariften müstebân olur ki a‘dâd-ı müsellesiye silsilesi şudur:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66 \ldots$$

44. Bir adedin müsellesî olup olmadığı başlıca iki hassa ile bilinir.

a) Tecrübesi matlûb aded 8 ile darb edilir, hâsıl-ı darba vâhid zam olunur. Bu mecmûu murabba’-ı tâm ise tecrübe olunan adedin müsellesî olduğu anlaşılır.

Bunu ispat için evvel-emirde a‘dâd-ı müsellesiyenin şekl-i umûmîsini bulalım. n adedine kadar:

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

silsile-i tabîiyyesinin mecmûu, aded-i müsellesîyi $\mathit{\Delta}$ rumuzuyla gösterirsek:

$$\mathit{\Delta} = \frac{n.(n+1)}{2}$$

dir. Şimdi bunu 8 ile darb ederek vâhid de zam edelim:

$$\frac{8n.(n+1)}{2} + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 \quad [g]$$

Tembih 1: Bu şekl-i umûmîden anlaşılıyor ki bir aded-i müsellesî iki aded-i müteâkib hâsıl-ı darbının nısfına müsâvîdir. Mesela $28 = \frac{7.8}{2}$ bir aded-i müsellesîdir. Kezalik, $78 = \frac{12.13}{2}$ bir aded-i müsellesîdir. Burada birinciyi 7, ikinciyi de 12 adedleri husûle getirdiğinden bu 7 ile 12’ye, mensup oldukları aded-i müsellesîlerin “kaide”leri tesmiye olunurlar.

Bu tarif mûcibince herhangi bir aded-i müsellesî malum iken onun kaidesini bulmak için yukarıki $[g]$ şekline müracaatla anlaşılır. Yani, aded-i müsellesîyi 8 ile darb, hâsıl-ı darba vâhid zam olunup cezri alındıktan sonra, hâsıl-ı cezrden vâhid tarh edilip 2 ile de taksîm edilirse o müsellesin kaidesi bulunmuş olur. Mesela 210 adedinin kaidesini bulmak matlûb olsa şöyle yaparız:

$$210 \times 8 + 1 = 1681$$

$$\sqrt{1681} = 41$$

olup bundan:

$$\frac{41 - 1}{2} = 20$$

bulunur ki 210 aded-i müsellesîsinin kaidesinin 20 olduğu tahakkuk etmiş olur.

b) Bir adedin müsellesî olup olmadığı şununla da anlaşılır:

Tecrübe olunacak aded, 2 ile darb edilir, sonra cezr-i murabba'ı alınır, hâsıl-ı cezr ile bundan kalan bâkî yekdiğerine müsâvî ise o aded müsellesîdir. Zîrâ, aded-i müsellesîlerin şekl-i umûmîsi olan $\frac{n.(n+1)}{2}$ ifadesini 2 ile darb etsek $n^2 + n$ şekli husûle gelir. Bunun takribî cezr-i murabba'ı n ve bundan kalan bâkî de yine n'dir.

Tembih 2: Aded-i müsellesînin tarifi umumîdir. Yani her iki aded-i müteâkibin (bunlar ne şekilde olursa olsunlar) hâsıl-ı darbının nısfı bir aded-i müsellesîdir. Mesela:

$$\frac{n^3.(n^3 + 1)}{2} \; ve \; \frac{2n^2.(2n^2 \pm 1)}{2}$$

şekilleri müsellesî adedler verir. Ve şu: $\frac{2n^2.(2n^2 \pm 1)}{2}$ şekli bundan sonra gelecek bir meselede lüzumu olacaktır.

A‘dâd-ı Mükemmele / Nombres parfaits

45. Bir nevi adedler vardır ki, bunlar garip ve merâk-âver bir hassaya maliktir. Bu adedlere [a‘dâd-ı mükemmele] namı veriliyor. Bu adedler şöyle tarif olunur:

Kendinden başka bi’l-cümle kâsımları mecmûu kendine müsâvî adedler “a‘dâd-ı mükemmele”dir.

6 adedi bir aded-i mükemmeldir. Zîrâ, kendinden başka bu adedin kâsımları $1, 2, 3$’tür. Bunların $1 + 2 + 3$ mecmûuları 6’dır. 28 adedi de aynı hassayı haizdir. Çünkü bunun da kendisinden başka bi’l-cümle kâsımları $1, 2, 4, 7, 14$’tür. Bunların mecmûu olan $1 + 2 + 4 + 7 + 14$ de 28’dir.

46. Bir aded-i aslî, bir aded-i mükemmel olamaz.

Zîrâ, bir aded-i aslînin kendinden başka ve vâhidden maada madrûbu yoktur.

Bir aded-i aslînin hiçbir kuvveti, aded-i mükemmel olamaz.

Zîrâ, her a aded-i aslîsinin herhangi m kuvvetini olursa olsun tasavvur edelim, hiçbir vecihle şu:

$$a^m = 1 + a + a^2 + \cdots a^{m-1} \quad [K]$$

müsâvâtı doğru değildir. Zîrâ bu müsâvât şöyle de yazılabilir:

$$a^m - a(1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-2}) = 1$$

Görülüyor ki bu müsâvâtın sol tarafı a ile kâbil-i taksîmdir. Bunların tefâzulü olan 1’in de a ile kâbil-i taksîm olması iktiza eder. Bu ise hilâftır. Bundan başka şu:

$$a^{m-1} + a^{m-2} + \cdots + a^3 + a^2 + 1$$

silsile-i hendesiyyesi $\frac{a^m-1}{a-1}$ ifadesine müsâvîdir. Hâlbuki bu ifade a^m'den herhâlde asgardır. Bu sebepten $[K]$ münasebeti sahih olamaz.

47. Mademki hiçbir aded-i mükemmel, a veya a^m şeklinde olamıyor; bu hâlde böyle bir adedin $a^m.b$ şeklinde olup olamayacağını araştıralım. Burada a ile b adedleri aslîdir.

$a^m.b$ adedi – kendi müstesna olarak – kendi madrûbları mecmûuna müsâvî olacağından bu:

$$a^m.b = (1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^m)(1 + b) - a^m.b$$

münasebeti tahaddüs eder. Bundan şu:

$$\begin{aligned} a^m.b = (1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1}) \times 1 \\ + (1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1})b \end{aligned}$$

Yahut:

$$\begin{aligned} b[a^m - (1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1})] \\ = a^m + (1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1}) \end{aligned}$$

olur. Bundan da şu:

$$b = \frac{a^m + (1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1})}{a^m - (1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1})} = \frac{a^m + \varphi}{a^m - \varphi} \quad \ldots (P)$$

olur ki, buradaki φ ile parantez içindeki zû-hudûd-ı kesîre gösterilmiştir.

İmdi: b kemmiyyetinin aded-i tâm olması şarttır. Bundan neşet eder ki yukarıki ifâde-i kesriyyenin mahreci vâhid olmalıdır. Başka türlü olamaz; çünkü $a^m + \varphi$ ifadesinin $a^m - \varphi$ ifadesi üzerine taksîminden 2φ yahut $2(1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1})$ bâkîsi zuhur edeceğinden ve a ise müsbet bir aded-i tâm olduğundan hiçbir vecih ile sıfır olamaz. Bu takdirce:

$$a^m - (1 + a + a^2 + \cdots + a^{m-1}) = 1$$

olmak lazım gelir. Bundan:

$$a^m - \frac{a^m - 1}{a - 1} = 1$$

olur. Yahut:

$$(a^m - 1)(a - 2) = 0$$

olmuş olur.

a adedi vâhidden a‘zam olduğundan şu yukarıki $(a^m - 1)(a - 2)$ hâsıl-ı darbının sıfır olması için mutlak $a = 2$ olmak zarurîdir. a'nın şu müsâvîsi (P)'nin yalnız suretinde mahalline vaz‘ edildikte (çünkü mahreci vâhiddir)

$$b = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^m$$

olur. Bu hâlde şu müsâvât elde edilir:

$$a^m . b = 2^m(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^m) \qquad [R]$$

Burada a ile b aslî aded olduklarından $a^m . b$'nin bu kıymeti aded-i mükemmel tarifine tamamen muvafık olmuş olur.

48. Şimdi yukardaki ifadeden a‘dâd-ı mükemmele şu suretle istihsal olunur:

$$2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^m$$

silsilesinin bidayetinden başlayarak hudûd-ı müteâkibe cem‘ edilir; hangi mecmûu aslî ise bu aded, tevakkuf edilen 2'nin kuvvetiyle darb edilir. Mesela:

$$1 + 2 = 3$$

Burada 3 aslîdir. 2'nin birinci kuvvetinde tevakkuf edildiğinden 3 adedi 2 ile darb edilir. $2.3 = 6$. Husûle gelen 6 adedi mükemmeldir.

Kezalik $1 + 2 + 2^2 = 7$ adedi aslîdir. 2'nin ikinci kuvvetinde tevakkuf edildiğinden $4.7 = 28$ adedi mükemmeldir. Bir misal daha yapalım:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$$

Bu aded de aslîdir. 2'nin dördüncü kuvvetinde duruldu, bu hâlde $31.16 = 496$ adedi de mükemmeldir. Çünkü bunun bi'l-cümle kâsımları:

$$1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496$$

olup kendi olan 496 istisna edilirse sairleri mecmûu 496 eder. Lakin $[R]$ müsâvâtında parantez içindeki silsileden şu:

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^m = \frac{2^{m+1} - 1}{2 - 1} = 2^{m+1} - 1$$

olup $a^m.b$ şeklindeki aded-i mükemmeli N ile irâe etsek:

$$N = (2^{m+1} - 1).2^m$$

münasebeti elde edilir.

Bu şekilden; yukardaki kaideden daha kolay bir kaide tahaddüs eder ki o da şudur:

Hadd-i evveli 2, dârıb-ı müştereği de 2 olan şu:

$$:= 2: 4: 8: 16: 32: 64: 128: 256: 512: 1024: \ldots$$

silsile-i hendesiyyesini teşkil ediniz. Bu silsilenin her haddinden vâhid tarh ediniz. Hangisi aslî ise onu alınız. Bunlarla şöyle:

$$4, 8, 32, 128, 8192, \dots$$

bir silsile teşkil ediniz. Zîrâ bunlardan vâhid tarh edilirse şu a‘dâd-ı asliyye husûle gelir:

$$3, 7, 31, 127, 8191, \dots$$

Şimdi bu a‘dâd-ı asliyyeden beheri silsile-i hendesiyyenin hangi haddinden zuhur etmiş ise o hadden evvel gelen hadd ile darb edilmelidir. Bu hâlde:

$$3.2 = 6, \qquad 7.4 = 28, \qquad 31.16 = 496, \qquad 127.64 = 8128 \dots$$

$$\dots$$

$$6, 28, 496, 8128, \dots$$

silsilesi husûle gelir ki bu silsiledeki adedlerin kâffesi mükemmeldir.

A‘dâd-ı Mütehâbbe / Nombres amiables

49. Şu aşağıdaki havâssı haiz olan N, N' gibi iki adede “a‘dâd-ı mütehâbbe”den denir:

Bu iki adedden biri olan N adedinin kâsımları mecmûu (adedin kendisinden sarf-ı nazar) N' adedine ve kezalik N' adedinin de kâsımları mecmûu (kendisinden sarf-ı nazar) N adedine müsâvî olursa, bu iki aded “a‘dâd-ı mütehâbbe”dendir.

Mesela 220 ve 284 adedleri a‘dâd-ı mütehâbbedendir. Zîrâ, birincisi olan 220 adedi, ikincisinin yani 284 adedinin kâsımları olan (kendisinden sarf-ı nazar) $1 + 2 + 4 + 71 + 142$ mecmûuna ve mütekabilen 284 adedi 220 adedinin kâsımları olan: $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$ mecmûuna müsâvîdir.

Şu tarif edegeldiğimiz hassayı haiz iki adedin tayin ve istihracı meselesi gayr-i muayyen mesail sırasındadır. Farz edelim ki N, N' adedleri şöylece:

$$\left.\begin{aligned} N &= a^{\alpha}.\, b^{\beta}.\, c^{\gamma} \ldots \\ N' &= {a_1}^{\alpha'}.\, {b_1}^{\beta'}.\, {c_1}^{\gamma'} \ldots \end{aligned}\right\} \ldots [A]$$

madrûbât-ı asliyyelerine tefrik edilmiş olsun.

Bu iki adedin madrûbât-ı asliyyeleri mecmûunu S ve S' ile göstermiş olsak şu:

$$S = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \times \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \ldots - N = N'$$

$$S' = \frac{{a_1}^{\alpha'+1} - 1}{a_1 - 1} \times \frac{{b_1}^{\beta'+1} - 1}{b_1 - 1} \times \frac{{c_1}^{\gamma'+1} - 1}{c_1 - 1} \ldots - N' = N$$

münasebâtı husûle gelir.

Şimdi, bu iki müsâvât bize şu münasebâtı verir:

$$N + N' = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \times \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \times \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \ldots,$$

$$N + N' = \frac{{a_1}^{\alpha'+1} - 1}{a_1 - 1} \times \frac{{b_1}^{\beta'+1} - 1}{b_1 - 1} \times \frac{{c_1}^{\gamma'+1} - 1}{c_1 - 1} \ldots$$

Bunlardan da şu münasebet elde edilir:

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\times\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\times\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\times\dots$$
$$=\frac{{a_1}^{\alpha'+1}-1}{a_1-1}\times\frac{{b_1}^{\beta'+1}-1}{b_1-1}\times\frac{{c_1}^{\gamma'+1}-1}{c_1-1}\times\dots$$

Şimdi, burada,

$$a_1=a,\qquad \alpha=\alpha',\qquad \beta=\beta'=1,\qquad \gamma=1,\qquad \gamma'=0$$

farz edersek şu münasebet husûle gelir:

$$\frac{b^2-1}{b-1}\times\frac{c^2-1}{c-1}=\frac{{b_1}^2-1}{b_1-1}\times\frac{{c_1}^2-1}{c_1-1}$$

Yahut:

$$(b+1)(c+1)=b_1+1$$

olup bundan da şu:

$$b_1=bc+b+c$$

müsâvâtı istihraç olunur.

Burada b_1 adedini tayin etmek için b ile c adedleri keyfe-me'ttefak alınabilir; yalnız şu şart ile ki bu üç adedin üçü de aslî olsun. Mesela:

$$a=a_1=2,\qquad \alpha=\alpha'=2,\qquad b=5,\qquad c=11$$

farz edilse:

$$b_1=5.11+5+11=71$$

olur ki, bu hâlde:

$$b=5,\qquad c=11,\qquad b_1=71$$

üç aded-i aslî olarak elde edilmiş olur.

Şimdi yukarıki müsâvîleri şöylece yazalım:

$$a = a_1 = 2, \qquad \alpha = \alpha' = 2, \qquad b = 5,$$

$$c = 11, \qquad \gamma' = 0, \qquad \gamma = 1, \qquad \beta = \beta' = 1$$

İşte bu müsâvâtlara nazaran (A)daki N ve N' adedlerini hesâb edelim:

$$N = 2^2.5.11 = 4.5.11 = 220$$

Kezalik:

$$N' = 2^2.71^1.{c_1}^0 = 4.71 = 284$$

olmuş olur.

İşte böylece istihsal edilen 220 ve 284 adedleri "a'dâd-ı mütehâbbe"dendir.

50. A'dâd-ı mütehâbbe gruplarını teşkil etmek için (Ozanam) nâm riyâzî şu aşağıdaki usulü vermiştir:

Şu cetvelde görüldüğü üzere evvelce hadd-i evveli 2, darb-ı müştereki yine 2 olarak bir silsile-i hendesiyye yazılır; sonra bu silsilenin her haddi 3 ile darb edilerek hâsıl-ı darblar bu silsilenin altına yazılarak:

$6, 12, 24, 48, \ldots$ silsilesi ikinci hatt-ı ufkîyi teşkil eder. Bu silsilenin her haddinden vâhid tarh ederek tefâzuller, silsile-i hendesiyyenin üst tarafına ve her haddin hizasına mütenâzıran yazılarak: $5, 11, 23, \ldots$ adedleri elde edilir.

Nihayet, $6, 12, 24, \ldots$ silsilesinin her haddi, mâ-kablindeki hadd ile darb ve hâsıl-ı darbdan vâhid tarh edilerek cetvelin dördüncü hatt-ı ufkîsi teşkil olunur:

$$2.3-1,\ 2^2.3-1,\ 2^3.3-1,\ 2^4.3-1,\ 2^5.3-1,\ \dots, 2^{n-1}.3-1,\ 2^n.3-1,\ 2^{n+1}.3-1, \dots$$

$$:= 2: 2^2: 2^3: 2^4: 2^5: \dots : 2^{n-1}: 2^n: 2^{n+1}: \dots$$

$$:= 2.3: 2^2.3: 2^3.3: 2^4.3: 2^5.3: \dots : 2^{n-1}.3: 2^n.3: 2^{n+1}.3: \dots$$

$$2^3.3^2-1,\ 2^5.3^2-1,\ 2^7.3^2-1,\ 2^9.3^2-1, \dots,\ 2^{2n-3}.3^2-1,\ 2^{2n-1}.3^2-1,\ \dots, 2^{2n+1}.3^2-1, \dots$$

Bu cetvel tedarik edildikten sonra son hatt-i ufkîden:

$$2^{2n-1}.3^2-1$$

aded-i aslîsi alınır ve bu adedin birinci hatt-ı ufkîdeki mütenazırı olan $2^n.3-1$ adediyle bu adedin üst tarafındaki $2^{n-1}.3-1$ adedi, yani şu üç aded-i aslî olmak şartıyla bi'l-intihâb alınır. Bu üç aded, dediğimiz tarzda elde edildikten sonra:

$$(2^{n-1}.3-1)(2^n.3-1)$$

hâsıl-ı darbını bunun mukabili olan silsile-i hendesiyyedeki 2^n hattı ile darb edilir. Kezalik:

$2^{2n-1}.3^2-1$ aded-i aslîsi ile de yine 2^2 darb edilerek böylece husûle gelen iki aded ki şunlardır:

$$(2^{n-1}.3-1)(2^n.3-1)\times 2^n,$$

$$(2^{2n-1}.3^2-1)\times 2^n$$

a'dâd-ı mütehâbbedendir.

Mesela $n=2$ olduğuna göre,

$$2^{n-1}.3^2-1 = 2^3.3^2-1 = 71$$

$$2^n.3-1 = 2^2.3-1 = 11$$

$$2^{n-1}.3-1=2.3-1=5$$

İşte şu: $5, 11, 71$ üç adedin üçü de aslî olduğundan:

$$5.11.2^2=220$$

$$71.4=284$$

adedleri a'dâd-ı mütehâbbedendir. Ve yine $n=4$ olduğuna göre:

$$2^{2n-1}.3^2-1=2^7.3^2-1=1151$$

$$2^n.3-1=2^4.3-1=47$$

$$2^{n-1}.3-1=2^3.3-1=23$$

Kezalik şu üç aded de: $23, 47, 1151$ aslî olduğundan bize şu:

$$47.23.2^4=17296$$

$$1151.2^4=18416$$

adedleri verirler.

Müteâdiller / Congruences

51. Müsbet veya menfi herhangi a ve b gibi iki aded-i tâmmın beynindeki fazlı herhâlde müsbet bir üçüncü m aded-i tâmmı taksîm ederse bu a ile b adedlerine – m aded-i tâmmına göre – müteâdildir denir. Veya aynı bu demek olan a ile b aded-i tâmlarından beheri müsbet bir m aded-i tâmmı üzerine taksîmlerinden zuhur eden bâkîler müsâvî olur ise bu iki a ve b adedleri müteâdil olurlar. Bu takdirce bu m aded-i tâmmına (modül) veya (muaddil), a ile b aded-i tâmlarına da m muaddiline göre yekdiğerinin bakiyesi denir.

Mesela 25 ile 3 adedleri 11 muaddiline göre müteâdildirler; çünkü $25 - 3 = 22$ eder ki bu 22 adedi 11 ile kâbil-i taksîmdir. Veyahut 25'i 11 üzerine taksîm etsek bakiye 3'tür[5].

Kezalik 3 adedini de 11 üzerine taksîm ettik bakiye yine 3'tür. İşte yukardaki tarife göre 25 ile 3 adedleri 11 muaddiline göre teadül eder. Şimdi a, b, m adedleri üç aded-i tâm olup a ve b adedleri beynindeki tefâzulü de m aded-i tâmmı tamamen taksîm ediyorsa bunların aralarında şu irtibat mevcuttur:

$$a = b + misl\, m \quad (1)$$

Bu münasebeti her mektep çocuğu bilir. Çünkü klasik ilm-i hesâb kitaplarının hemen kâffesinde – hususiyle kâbiliyyet-i taksîm bahislerinde – kesretle geçer. (1) münasebeti şöylece de yazılabilir:

$$a - b = misl\, m$$

Veyahut:

$$a - b = k.m \quad (2)$$

Bu son müsâvâtlara dikkatle bakılırsa görülür ki a ve b gibi iki aded-i tâmmın beynindeki fazl m aded-i tâmmı ile diğer herhangi bir madrûbun olursa olsun hâsıl-ı darbına müsâvîdir.

(2) münasebeti bir müsâvâtta mevcut hassaların pek çoğuna malik olduğundan riyâzi-yi şehîr "Gauss" bu münasebeti: $a \equiv b\ (muaddil\, m)$ tarzında göstermesini tensip etmiş ve bununla müteâdiller hakkında fevkalade sühûletler ibrazına bâis olmuştur.

---

[5] A'dâd-ı tâmmenin bildiğimiz iki adedin birbiri üzerine taksîminden kalan adede bâkî denir ki Fransızcada buna reste derler. Hâlbuki müteâdili teşkil eden taksîmden kalan adede résidu diyorlar. Biz de buna lisanımızda "bakiye" dedik.

Bu müteâdilin sûret-i telâffuzu şöyledir: a, m muaddiline göre b ile teadül eder.

Bu müteâdillerde a ile b müsbet veya menfi olabilirler. Fakat m muaddili herhâlde mutlak yani müsbettir.

Şimdi bize $c = d + km$ gibi a'dâd-ı tâmmeden müteşekkil bir müsâvât verilse biz onu $c \equiv d\ (muaddil\, m)$ gibi bir müteâdile tahvil edebiliriz.

Kezalik, $d \equiv q\ (muaddil\, m)$ gibi bir müteâdili de: $d = q + misl\, m$ veyahut: $d = q + tm$ gibi bir müsâvâta tahvil edebiliriz. Burada t bir aded-i tâmdan ibarettir. Mesela:

$$43 = 3 + 5m$$

müsâvâtı

$$43 \equiv 3\ (muaddil\ 5)$$

müteâdiline muadildir. Kezalik:

$$68 \equiv 8\ (muaddil\ 12)$$

müteâdili de

$$68 = 8 + misl\ 12$$

Veyahut:

$$68 = 8 + 5.12$$

müsâvâtının aynıdır.

Birçok hususâtta müsâvâtlarla müteâdiller aynı havâssa maliktirler ki, şu aşağıdaki muamelâttan anlaşılacaktır.

52. Aynı muaddile göre teadül eden bir takım müteâdiller taraf tarafa cem', tarh, darb olunabilirler. Mesela;

$$a \equiv b \ (muaddil\ m)$$

$$a' \equiv b' \ (muaddil\ m)$$

gibi iki müteâdili ele alalım. Bunlar:

$$\left.\begin{aligned} a &= b + n.m \\ a' &= b' + n'.m \end{aligned}\right\} \ (3)$$

münasebetlerine tahvil olunabilir ki, buradaki n ve n' adedleri birer aded-i tâmmı irâe ederler. Şimdi bu iki müsâvâtı taraf tarafa cem‘ etmiş olsak:

$$a + a' = b + b' + m.(n + n') \quad (4)$$

olur.

Lakin burada n ve n' adedleri tam olduklarından onların mecmûu da bittabi tamdır.

Bu hâlde: $n + n' = k$ yazabiliriz ki burada k bir aded-i tâmmı gösterir, öyle ise (4) münasebeti:

$$a + a' = b + b' + m.k$$

olur. Bundan:

$$a + a' = b + b' \ \ (muaddil\ m)$$

müteâdili tahaddüs edip matlûb sabit olur.

Ve yine (3) ile gösterilen iki müsâvât yekdiğerinden tarh edilse:

$$a - a' = b - b' + m.(n - n')$$

olur. Yukarda cem‘ hakkında yapılan aynı muhakeme ile:

$$a - a' = b - b' \ \ (muaddil\ m)$$

olur. Kezalik,

(3) ile gösterilen iki müsâvât taraf tarafa darb edilse,

$$a.a' = b.b' + m(b'.n + b.n' + m.n.n')$$

olup m, n, n', b' adedlerinden beheri tam olduklarından parantez derunundaki ifadenin hâsılı da bittabi bir aded-i tâm olur. Ve mesela bir t aded-i tâmmına müsâvîdir. Öyle ise yukarıki müsâvât:

$$a.a' = b.b' + m.t$$

olur ki bundan:

$$a.a' = b.b' \ \ (muaddil\ m)$$

olup matlûb sabit olur.

53. Eğer aynı muaddile göre alınan müteâdiller ikiden ziyade olurlar ise, yine yukardaki muhakemenin aynını yaparak onların, cem‘, tarh ve darblarından bir tek müteâdilin hâsıl olacağı ispat edilir.

54. Aşağıdaki şu müteâdiller:

$$\left.\begin{array}{c} a \equiv b \\ a' \equiv b' \\ a'' \equiv b'' \\ \ldots \end{array}\right\} (muaddil\ m)$$

taraf tarafa darb edilse:

$$a.a'.a'' \ldots \equiv b.b'.b'' \ldots \quad (muaddil\ m) \quad (5)$$

olur. Eğer,

$$a = a' = a'' \ldots; \quad b = b' = b''$$

olsa ve bunların adedi de n kadar bulunsa bu hâlde (5) münasebetinden:

$$a^n \equiv b^n \quad (muaddil\ m)$$

müteâdili husûle gelir.

Bundan istintâc olunur ki, bir müteâdilin her iki tarafı aynı aded-i tâm kuvvetine ref‘ edilir.

Buraya kadar verilen tafsilattan anlaşılıyor ki (taksîm ameli müstesna olduğu hâlde) müteâdiller de adeta bildiğimiz müsâvâtların hassasına maliktirler. Yani bir müteâdilin her iki tarafına aynı aded-i tâm zam olunabilir. Her iki tarafından aynı aded-i tâm tarh edilebilir. Her iki tarafı aynı aded-i tâm ile darb olunur. Her iki tarafı aynı aded-i tâm kuvvetine ref‘ edilebilir.

Fakat taksîm hususunda iş değişir. Demek isteriz ki bir müteâdilin her iki tarafı aynı aded-i tâm ile taksîm olunamaz. Bunda bazı şerait vardır ki şimdi onları zikredeceğiz.

55. Bir müteâdil, muaddil ile mütebâyin herhangi bir adedle olursa olsun taksîm olunabilir. Mesela:

$$ca \equiv cb \quad (muaddil\ m)$$

müteâdili şöyle:

$$c \times a = c.b + m.k$$

müsâvâtına tahvil olunduktan sonra, bunun her haddi c ile taksîm olunsa:

$$a = b + \frac{m \times k}{c} \quad (6)$$

olur.

Hâlbuki m ile c mütebâyin olduğundan $\frac{m\times k}{c}$ ifadesinde m adedi c ile kâbil-i taksîm değildir. Lakin $\frac{m\times k}{c}$'nin aded-i tâm olması lazımdır. Bu hâlde $m \times k$ hâsıl-ı darbı c ile kâbil-i taksîmdir.

Hâlbuki: "İki madrubun hâsıl-ı darbını tamamen taksîm eden bir aded, o madrûblardan biriyle mütebâyin olsa diğerini behemehâl taksîm eder." da'vâ-yı nazarîsine göre (ki bu da'vâ-yı nazarî klasik hesâb kitaplarının cümlesinde vardır.) $m \times k$ hâsıl-ı darbını taksîm eden ve m ile mütebâyin olan c adedi k adedini herhâlde taksîm eder. Öyle ise (6) müsâvâtı:

$$a = b + mt$$

olur. [Burada t herhangi bir aded-i tâmmı irâe eder.] Bu takdirce:

$$a \equiv b \quad (muaddil\, m)$$

olup matlûb sabit olur.

Lakin bu netice, m ile c bir kâsım-ı müştereke malik olurlarsa, elde edilemez. Mesela: Yukardaki müteâdilde c ile m mütebâyin olmayıp da bir kâsım-ı müştereke malik olsalar bu hâlde:

$$c \times a = c \times b + m \times k$$

müsâvâtından

$$a = b + \frac{m \times k}{c} \quad (7)$$

müsâvâtı hâsıl olursa da bu müsâvâttan

$$a \equiv b \quad (muaddil\, m)$$

müteâdili tahaddüs edemez. Yani bu müteâdil doğru değildir. Zîrâ $\frac{m'}{c'}$ kesri $\frac{m}{c}$'nin gayr-i kâbil-i ihtisâr müsâvîsi olsun. Yani $\frac{m'}{c'} = \frac{m}{c}$

olsun. Bu $\frac{m}{c}$'nin yerine (7) müsâvâtında müsâvîsi olan $\frac{m'}{c'}$'yü vaz' edersek,

$$a = b + \frac{m' \times k}{c'}$$

müsâvâtı elde edilir.

Lakin burada c' ile m' adedleri mütebâyindirler. Çünkü $\frac{m'}{c'}$ kesri gayr-i kâbil-i ihtisârdır. Bu takdirce mademki, c' adedi m' adedini tamamen taksîm etmez; öyle ise $\frac{m' \times k}{c'}$ ifadesinin aded-i tâm olması için c''nün herhâlde k adedini tamamen taksîm etmesi lâ-büddür. Bu sebepten:

$$a = b + tm$$

müsâvâtı hâsıl olur ki burada t bir aded-i tâmdır. Öyle ise bu müsâvâttan

$$a \equiv b \ \ (muaddil\, m)$$

müsâvâtı hâsıl olup matlûb sabit olur.

Bundan anlaşılır ki bir müteâdilde her haddi tamamen taksîm eden bir aded-i tâm, muaddil ile mütebâyin olmazsa o müteâdili o aded-i tâmla taksîm doğru değildir; meğerki o aded-i tâmla muaddilin kâsım-ı müşterek-i a'zamı ile muaddili de taksîm etmelidir. Şu aşağıdaki misaller tenvîr-i fikre pek çok yardım ederler. Mesela:

$$88 \equiv 32 \ \ (muaddil\ 7)$$

müteâdilinde 88 ile 32 adedleri 8 ile kâbil-i taksîmdir. 8 ise 7 muaddili ile mütebâyindir. Bu hâlde taksîm ameliyatı caiz olup,

$$11 \equiv 4 \ \ (muaddil\ 7)$$

müteâdili de sahihtir. Zîrâ $11 - 4 = 7$ fazlı 7 ile kâbil-i taksîmdir. Hâlbuki:

$$88 \equiv 32 \quad (muaddil\ 14)$$

müteâdilinde yalnız tarafeyn 8 ile taksîm edilse:

$$11 \equiv 4 \ \ (muaddil\ 14)$$

müteâdili sahih değildir yani müteâdil olamaz. Çünkü: $11 - 4 = 7$ fazlı 14 muaddili ile kâbil-i taksîm değildir.

Fakat 8 kâsımı ile 14 muaddili 2 kâsım-ı müşterek-i a‘zamına maliktirler. Bu hâlde hem müteâdilin iki tarafı hem de muaddil, üçü birlikte 2 kâsım-ı müşterek-i a‘zamı üzerine taksîm edilseler:

$$44 \equiv 16 \ \ (muaddil\ 7)$$

olur ki bir müteâdildir. Çünkü $44 - 16 = 28$ fazlı 7 muaddili ile kâbil-i taksîmdir. Kezalik,

$$270 \equiv 60 \ \ (muaddil\ 14)$$

müteâdilinin her iki tarafı 15 ile taksîm edilebilir; çünkü: 15 adedi 14 adedi ile mütebâyindir. Ba‘de’t-taksîm:

$$18 \equiv 4 \ \ (muaddil\ 14)$$

olur ki muvâfık-ı hakîkattir.

Lakin yine aynı müteâdilin her iki tarafı 6 ile kâbil-i taksîm ise de tarafeyni bununla taksîm doğru olamaz; zîrâ 6 adedi 14 muaddili ile mütebâyin değildir. Bu hâlde bunların kâsım-ı müşterek-i a‘zamı olan 2 adedi ile hem tarafeyn, hem de muaddil taksîm edilmelidir. Öyle ise birinci tarife göre:

$$45 \equiv 10 \ \ (muaddil\ 14)$$

sahih değildir. Fakat ikinciye göre:

$$135 \equiv 30 \ \ (muaddil\, 7)$$

sahihtir. Şimdi de muaddil olan 7 adedi 15 ile mütebâyin olduğundan bu son müteâdilin her iki tarafını 15 ile taksîm edebiliriz. Bu hâlde:

$$9 \equiv 2 \ \ (muaddil\, 7)$$

bir müteâdildir.

56. Sühûletle ispat olunabilir ki, bir müteâdilin her iki tarafına veya yalnız bir tarafına (muaddil)in herhangi bir misli olursa olsun zam olunsa veyahut her iki tarafından veya yalnız bir tafından (muaddil)in herhangi bir misli olursa olsun tarh edilse, müteâdil yine sahih olur. Mesela:

$$a \equiv b \ \ (muaddil\, m)$$

müteâdilinden aşağıdaki müteâdiller tahaddüs eder.

$$\left.\begin{matrix} a \equiv b + m, a \equiv b + 2m, a \equiv b + 3m, \ldots ilh \\ a + m \equiv b, a + 2m \equiv b, a + 3m \equiv b, \ldots ilh \end{matrix}\right\} (muaddil\, m)$$

Umumiyetle t, c herhangi iki aded-i tâmmı olursa olsun irâe etseler:

$$a + tm, \qquad a - tm, \qquad b + cm, \qquad b - cm$$

şekillerinde bulunan a‘dâd-ı tâmmenin kâffesi yekdiğeriyle birer müteâdil teşkil ederler. Yani şöyle olurlar:

$$a + tm \equiv b + cm \ \ \ (muaddil\, m)$$

$$a - tm \equiv b - cm \ \ \ (muaddil\, m)$$

Zîrâ bedihidir ki, eğer a ile b, (m) muaddiline göre bir müteâdil teşkil ediyorlar, yani $(a-b)$ tefâzulü (m) ile kâbil-i taksîm oluyorsa:

$$a \pm tm, \qquad b \pm cm$$

şekilleri arasındaki tefâzul de (m) ile kâbil-i taksîm olup:

$$a \pm tm \equiv b \pm cm \quad (muaddil\, m) \ \dots (8)$$

müteâdili hâsıl olur.

Şimdi (8) müteâdil-i umûmîsi bize gösteriyor ki, herhangi a adedinin olursa olsun bir (m) muaddiline göre muhtelif lâ-yuadd bakiyesi vardır. Mesela:

$$-13 \equiv 172 \ \ (muaddil\ 5)$$

müteâdilinin lâ-yuadd bakiyesi vardır. Çünkü bu müteâdil şöylece de:

$$-13 \equiv 172 \pm 5k \ \ (muaddil\ 5)$$

yazılabilir. Mesela: $k = 3$ farz etsek

$$-13 \equiv 172 \pm 15 \ \ (muaddil\ 5)$$

olup bundan:

$-13 \equiv 157$ veyahut $-13 \equiv 187 \ \ (muaddil\ 5)$ olur.

Hâsılı, k adedine sıfırdan bed' ile a'dâd-ı tâmmâ kıymet verilecek olsa, birçok muhtelif kıymetlerin yani bakiyelerin zuhuruna sebebiyet verilmiş olur. Lakin bu bakiyelerin içinde bir tane vardır ki, en küçüktür. Buna (bakiyye-i asgariyye) namı verilir ki, ekseriyetle bunun bulunması ve kullanılması şarttır. Bu misalimizde (bakiyye-i asgariyye-i müsbete) 2'dir. Bu hâlde $k = -34$'tür. Çünkü,

$$-13 \equiv 172 - 5 \times 34 \equiv 2 \quad (muaddil\, 5)$$

Bundan da:

$$-13 \equiv 172 - 170 \equiv 2 \quad (muaddil\, 5)$$

olmuş olur.

İşte burada (-3)'ün mütebâki-yi asgarîsi müsbet (2)'dir. (-3) de (-13)'ün menfi olarak mütebâki-yi asgarîsidir. Bu hâlde $k = 35$'tir. Çünkü,

$$-13 \equiv 172 - 5 \times 35 \equiv 172 - 175 \equiv -3 \quad (muaddil\, 5)$$

olur.

Bir aded-i tâmmın herhangi bir muaddile göre olursa olsun bakiyye-i asgariyyelerini taharrî etmek için o aded-i tâmmı muaddile taksîm etmeli ve hâric-i kısmeti bir noksan ve bir fazlası ile almalıdır. Yukardaki misalde (-13) adedinin (5) muaddiline göre bakiyye-i asgariyyeleri:

$-\frac{13}{5}$ (2) veya (-3)'tür. Yani bu taksîmde hâric-i kısmet -2 olursa bakiyye-i asgariyye (-3) olur. Hâric-i kısmeti -3 alırsak bakiyye-i asgariyye (2) olmuş olur.

17 adedinin 13 muaddiline göre müsbet bakiyye-i asgariyyesi 4 olup, menfi bakiyye-i asgariyyesi de (-9)'dur. Umumiyetle herhangi bir (d) aded-i tâmmı olursa olsun bunun bir m aded-i tâmmı ile hâric-i kısmeti q ve bâkî de r olsa:

$$d = mq + r$$

müsâvâtı tahaddüs eder ki, bundan,

$$d \equiv r \quad (muaddil\, m)$$

müteâdili hâsıl olur.

Bir aded-i tâmmın her iki bakiyye-i asgariyyeleri mecmûu (işaretlerinden sarf-ı nazar) muaddile müsâvîdir.

Mesela 19 adedinin 7 muaddiline göre bakiyye-i asgariyyeleri $+5$ ile -2'dir. İşaretlerinden sarf-ı nazar mecmûuları $5+2=7$ olup muaddile müsâvî olur.

İhtar: Birçok mesail var ki cebr-i âdî veya hesâb-ı âdî ile ya pek müşkül bir suretle halledilir. Veyahut hiç halledilemez, hâlbuki müteâdiller vasıtasıyla pek kolay surette hallolunur. İşte biz burada bir iki meselenin halli ile bunu meydana koyacağız:

Mesele 1: Bir kumandana ne miktar mevcudu var diye sual olunmuş. Kumandan şu cevabı vermiş: "Mevcudumu on birerden saflar teşkil ediyorum; (4) nefer açıkta kalıyor. Reh-güzerimizde bulunan bir karakolhaneye (200) nefer bırakmak mecburiyetinde bulundum. Şimdi kalan neferleri 23'erden saflar tertip ediyorum (12) nefer açıkta kalıyor: Muharebeye girişeceğimiz cihetle (400) nefer kuvve-i muâvene olarak geldi. Safları 31'erden teşkile başladım. (15) nefer hariçte kaldı. Harb ettik; düşmana 712 nefer maktul ve mecruh verdik. Mütebâkî mevcudumu 43'erden saflar teşkil eyledim. 23 nefer açıkta kaldı. Bidayette mevcudum (2000) ile (3000) arasında idi." Kumandanın ifadesine nazaran acaba bidayette ne miktar askerle yola çıktığını bulmak matlûbdur?

Meselenin sûret-i halli:

$$x \equiv 4 \ (muaddil\ 11)$$

$$x \equiv 5 \ (muaddil\ 23)$$

$$x \equiv 1 \ (muaddil\ 31)$$

$$x \equiv 18 \ (muaddil\ 43)$$

Ber-mûcib-i ifâde müteâdiller böylece tertip ve tanzim edildikten sonra bunların hangisinden başlansa matlûba dest-res olunursa da "muaddil"in a'zamından başlamak mûcib-i sühûlettir. İşte biz de burada muadillerin en büyüğü olan (43)ten başlayacağız. Son müteâdil şöylece yazılabilir:

$$x = 18 + 43m \quad (a)$$

(x)in bu müsâvîsi (31) muaddilinde mahalline vaz' olundukta:

$$18 + 43m \equiv 1\ (muaddil\ 31)$$

$(43m)$den (31) muaddili tarh olunsa:

$$12m \equiv -17, (muaddil\ 31)$$

Bunun sağ tarafına 31 muaddili zam olunursa:

$$12m \equiv -17 + 31 \equiv 14\ (muaddil\ 31)$$

Tarafeyn (2) ile taksîm olunsa:

$$6m \equiv 7\ (muaddil\ 31)$$

olur. Sol tarafına yine muaddil (31) zam edilse:

$$6m \equiv 7 + 31 \equiv 38\ (muaddil\ 31)$$

olup bundan:

$$3m \equiv 19\ (muaddil\ 31)$$

olur. Muaddilin iki misli sağ tarafa zam edilse:

$$3m \equiv 19 + 62 \equiv 81\ (muaddil\ 31)$$

olup bundan:

$$m = 27 + 31m'$$

olur. Bu (m)nin müsâvîsi (a) müsâvâtında mahalline vaz‘ olundukta:

$$x = 18 + 43(27 + 31m')$$

Veyahut:

$$x = 1179 + 1333m' \quad (b)$$

olur. Bu (x)in müsâvîsi (23) muaddilinde mahalline vaz‘ olundukta:

$$1179 + 1333m' \equiv 5(muaddil\ 23)$$

olur. Bu muâdilde muaddilin fevkinde bulunan adedleri (muaddilin münasip miktarda misilleri tarh edilerek) muaddilin aşağısına indirmelidir.

$$6 + (-m') \equiv 5\ (muaddil\ 23)$$

Bu da:

$$-m' \equiv 5 - 6 \equiv -1\ (muaddil\ 23)$$

$$-m' \equiv -1\ (muaddil\ 23)$$

müteâdilinin tarafeyni (-1) ile darb olunsa:

$$m' = 1 + 23m''$$

olur. m$''$'nün müsâvîsi (b) müsâvâtında yerine vaz‘ edilse:

$$x = 1179 + 1333(1 + 23m'')$$

Bundan da:

$$x = 2512 + 30659m'' \quad (c)$$

olur. Bu (x)in müsâvîsi (11) muaddilinde mahalline vaz‘ edilse:

$$2512 + 30659m'' \equiv 4\ (muaddil\ 11)$$

Bu da yukardakiler gibi hallolundukta:

$$m'' \equiv 0\ (muaddil\ 11)$$

Bu da:

$$m'' = 11k$$

olup bu m″nün müsâvîsi (b) müsâvâtında mahalline vaz‘ olunsa:

$$x = 2512 + 337249.k$$

olur. Veyahut:

$$x \equiv 2512(muaddil\ 337249)$$

olur. Bu müteâdilde (x)in en küçük kıymeti 2512'dir ki, meseleye tamamıyla tevafuk eder. Hâlbuki bu adede de muaddil olan [337249] adedinin herhangi misli olura olsun zam edilirse, meseleye muvafık adedler zuhur ederse de bunlar 3000'in fevkinde olduklarından kumandanın kuvâ-yı mevcûdesine muhaliftir. Bu kumandanın mevcudu tamamen: 2512 kişiden ibarettir.

Mesele 2: Bir adamın mahallesi bakkalına (67) kuruş borcu varmış; bakkala borcunu vermek üzere müracaat eder. Fakat bu zatın üzerinde yalnız Osmanlı lirasıyla Fransız lirası var; bakkalda da yalnız İngiliz lirasından başka para yok. Şimdi tamamen bu altmış yedi (67) kuruşu ödemek için bu paralar nasıl mübadele edilmelidir?

Ber-mûcib-i mesele şu muâdele tanzim edilir:

$$108x + 120y + 95z = 67$$ [6]

[6] Burada Osmanlı lirası 108, İngiliz lirası 120, Fransız da 95 farz edilmiştir. Ben bu meseleyi, paraların kıymeti böyle iken tertip etmiştim.

Bu muâdelenin sağ tarafındaki hadlerden her hangisi olursa olsun sol tarafa nakliyle mesele hallolunur ise de burada 108 ile 120 adedlerinin kâsım-ı müşterek-i a‘zamları 12 olduğundan üçüncü $95z$ haddini sol tarafa atmak daha muvafıktır.

$$108x + 120y = 67 - 95z \quad (d)$$

Bu muâdelenin sağ tarafında bulunan 108 ve 120 emsallerinin kâsım-ı müşterek-i a‘zamı 12 olduğundan sol tarafın da behemehâl 12 ile kâbil-i taksîm olması iktiza eder. Bu cihetle:

$$67 - 95z \equiv 0 \ (muaddil\ 12)$$

$$-95z \equiv -67 \ (muaddil\ 12)$$

Tarafeyn (-1) ile darb olunsa:

$$95z \equiv 67 \ (muaddil\ 12)$$

olur. Bundan da:

$$-z \equiv 7 \ (muaddil\ 12)$$

$$z \equiv -7 \ (muaddil\ 12)$$

Bu da:

$$z \equiv 5 \ (muaddil\ 12)$$

olur. Yani:

$$z = 5 + 12m \quad (f)$$

olur. (z)nin bu müsâvîsi (d) muâdelesinde mahalline vaz‘ olunsa:

$$108x + 120y = 67 - 95 \times 5 = -408$$

olup bundan:

$$9x + 10y = -34 \quad (g)$$

olur. Bu da:

$$9x \equiv -34 \quad (muaddil\ 10)$$

müteâdiline bi'ttahvil hallolundukta:

$$x = 4$$

olup (x)nin bu müsâvîsi (g)'de mahalline konulsa:

$$36 + 10y = -34$$

Bundan da:

$$10y = -70$$

$$y = -7$$

olmuş olur. Bu hâlde borcu olan adam 4 Osmanlı lirasıyla 5 Fransız lirası verecek, bakkaldan 7 İngiliz lirası alacaktır.

Tembih: Yukarda halledegeldiğimiz muâdelât, ulûm-ı riyâziyyenin (tahlîl-i istikrâî) kısmına tâbi olup bu kısım da nazariyye-i a'dâd dâhilindedir. Birinci meselenin lâ-yuadd halleri olduğunu söylemiştik, ikinci meselenin de yine böyle lâ-yuadd halleri vardır. Bunu ilerde sırası geldiği vakit bu gibi mesailin umumî surette hallerinden bahsedeceğiz. Yalnız burada şunu ihtara lüzum görürüz ki yukarıki meselede (f) müsâvâtında m adedine a'dâd-ı tâmme olarak verilecek kıymetlerin kâffesine göre meselenin muhtelif ve müteaddit surette hallerine muvaffak olunur. Mesela (m) adedine 1 kıymeti verilmiş olsa $z = 17$ olup mahalline vaz' ile aynı usule riayetle halle devam olunsa:

$$x = 9$$

$$y = -21$$

kıymetleri elde edilir.

Yani borcu olan adam 9 Osmanlı lirasıyla 17 Fransız lirası bakkala verir ve ondan 21 İngiliz lirası alırsa 67 kuruş borcu tamamen ödenmiş olur.

İşte (f) müsâvâtında m adedine verilecek a‘dâd-ı tâmmenin kâffesine göre lâ-yuadd muhtelif haller bulunur.

Altıncı Fasıl

Birinci Dereceden Müteâdiller

57. Bundan evvelki mebâhiste birinci dereceden olan müteâdillerden sûret-i husûsiyyede bir nebzecik bahsetmiş idik. Şimdi bu müteâdillerin şekl-i umûmîlerinden ve müteaddit usullerle sûret-i hâllerinden bahsedeceğiz.

Bir gayr-i muayyenli, birinci dereceden müteâdillerin şekl-i umûmîlerinden ve müteaddit usullerle sûret-i hâllerinden bahsedeceğiz. Bu müteâdillerin şekl-i umûmîsi şudur:

$$ax + b \equiv a'x + b' \quad (muaddil\ m) \quad (1)$$

Bu gibi bir müteâdil her zaman şu şekle ircâ edilebilir:

$$nx \equiv q \quad (muaddil\ m)$$

Yukarıki müteâdili bu hâle getirmek için:

$$a - a' = n$$

$$b - b' = q$$

farz etmek ve bunları mahallerine koymak kâfidir. (1) müteâdil-i umûmîsi

$$nx \equiv q \quad (muaddil\, m)$$

şekline girdikten sonra şunu gösterir ki $(nx - q)$ ifadesi m muaddili ile taksîm olunursa hâric-i kısmet bir aded-i tâm çıkar. Yahut aynı bu demek olan

$$y = \frac{nx - q}{m}$$

müsâvâtında (y) kemmiyyeti bir aded-i tâmdır. Ve bu aded-i tâm da gayr-i muayyendir. Bu takdirce, (1) müteâdilinin cezrini bulmak veyahut:

$$nx - q = my \quad (2)$$

muâdelesini halletmek aynı meseleden ibarettir.

Birinci dereceden olan müteâdillerin halli bizi gayr-i muayyen birçok mesâilin bilinmesine sevk eder ki şimdi aşağıda bunlardan bahsedeceğiz.

58. Meçhullerin adedinden az muâdelelerin hallerine tefevvuk eden bi'l-cümle mesaile (gayr-i muayyen mesail) veya (Diyofant meseleleri) derler.

Mesela bir adedin 5 misline, diğer bir adedin 13 misli zam olunsa mecmû' 72 adedine müsâvî oluyor.

İşte bu şartı vücuda getirmek için ilm-i cebirce şu:

$$5x + 13y = 72$$

muâdelesi tanzim olunur ki burada meçhul iki, muâdele bir olduğundan bunun halline kavâid-i cebriye ile pek güç muvaffak olunur.

Şimdi bu muâdeleyi mesela x meçhulüne göre halletmiş olsak:

$$x = \frac{72 - 13y}{5}$$

ifadesini buluruz. Bu ifadede y kemmiyyetine müsbet veya menfi, tam, kesir, gayr-i müşterekü'l-mikyası gibi her ne olursa olsun adedler verilse, x için mukabil bir kıymet elde edilir ve bu kıymetler de lâ-yuadd bir surette bulunur.

Burada y kemmiyyeti için yalnız a'dâd-ı tâmme alınsa, aşağıdaki iki silsile-i a'dâd elde edilir:

$$y = 1, \qquad x = \frac{59}{5}$$

$$y = 2, \qquad x = \frac{46}{5}$$

$$y = 3, \qquad x = \frac{33}{5}$$

$$y = 4, \qquad x = \frac{4}{1} = 4$$

$$y = 5, \qquad x = \frac{7}{5}$$

$$y = -6, \qquad x = -\frac{6}{5}$$

...

İşte bu minval üzere y kemmiyyetine kıymetler vererek devam olunsa, x gayr-i muayyeni için de lâ-yuadd mukabil kıymetler istihsal olunur. Lakin dikkat olunursa görülür ki, a'dâd-ı tâmme olarak yalnız iki mukabil kıymet vardır. Bunlar da $y = 4$ olduğuna göre $x = 4$'tür.

Fakat a‘le’l-ekser aranılacak kıymetlerin müsbet olarak a‘dâd-ı tâmmeden olmaları şart koşulur. Bu hâlde mümkün olabilen hallerin adedi artık lâ-yuadd olamaz, tahdid olunur. İşte bu hususu hallerin taharrîsidir ki, başlıca muâdelât-ı gayr-i muayyenenin hallerine esas ittihaz edilmiştir.

Evvel-emirde şunu beyan edelim ki:

$$ax + by = c$$

gibi iki meçhullü bir muâdelenin a‘dâd-ı tâmme olarak halli, ancak a ile b adedlerinin mütebâyin olmalarına vabestedir. Eğer bu iki emsal bir madrûb-u müştereke, daha doğrusu bir kâsım-ı müşterek-i a‘zama malik iseler x ve y meçhullerinin a‘dâd-ı tâmme olarak kıymet almaları, c hadd-i ma’lûmunun o madrûb-u müştereki hâvî olmasına mütevakkıftır.

Zîrâ, eğer a ve b adedleri bir (d) kâsım-ı müşterek-i a‘zamına malik iseler, $a = da'$ ve $b = b'd$ münasebetleri elde edilir ki burada a' ile b' bittabi mütebâyindirler. Bu takdirce muâdele de şu şekle girer:

$$da'x + b'dy = c$$

Bundan da:

$$a'x + b'y = \frac{c}{d}$$

münasebeti hâsıl olur.

Şimdi burada görülüyor ki x ve y kemmiyyetleri $\frac{c}{d}$ bir aded-i tâm olmayınca a‘dâd-ı tâmme üzere halli mümkün olamaz. Öyle ise,

$$\frac{c}{d} = c'$$

olarak bir aded-i tâmmı irâe eylesin. Bu hâlde

$$a'x + b'y = c'$$

muâdelesi husûle gelir ki, burada a', b', c' adedleri birer aded-i tâmdan ibaret oldukları gibi a', b' adedleri de mütebâyindirler. Birinci dereceden iki meçhulü hâvî tek bir muâdele, şu son şekle girmeyince, yani meçhullerin emsalleri ile aded-i ma'lûm-ı tâm aded ve meçhullerin emsalleri mütebâyin olmayınca a'dâd-ı tâmme üzere halledilemez.

59. Şimdi iki meçhullü tek bir muâdelenin yukardaki kâbil-i hall bir şekle gelince, kaç tarzda halledilebileceğini göstermek için yine yukardaki:

$$5x + 13y = 72$$

muâdelesini ele alalım. Bunu x meçhulüne göre halledersek:

$$x = \frac{72 - 13y}{5}$$

şeklini buluruz. $72 - 13y$ ifadesini 5 üzerine taksîm edelim:

$$x = 14 - 2y + \frac{2 - 3y}{5}$$

ifadesi hâsıl olur.

Bu ifadenin sol tarafının aded-i tâm olması:

$$\frac{2 - 3y}{5}$$

şeklinin aded-i tâm olmasına mütevakkıftır. Öyle ise:

$$\frac{2 - 3y}{5} = m$$

farz edelim. Burada m gayr-i muayyen bir aded-i tâmdır. Bu hâlde

$$x = 14 - 2y + m \quad (1)$$

Diğer taraftan da:

$$2 - 3y = 5m$$

münasebetlerini hâsıl etmiş oluruz. Bu son muâdelenin şekli, muâdele-i mefrûza şeklinin aynıdır. Yalnız bu son muâdelede gayr-i muayyenlerin emsalleri küçüktür. Bu son muâdeleyi de y kemmiyyetine göre halledelim:

$$y = \frac{2 - 5m}{3}$$

Burada mümkünü'l-icrâ olabilen taksîm ameliyatını icra edelim:

$$y = -m + \frac{2 - 2m}{3}$$

olur. Burada y meçhulünün kıymeti tam olmak için $\frac{2-2m}{3}$ ifadesinin bir aded-i tâm olmasına bakar. Öyle ise bunu da:

$$\frac{2 - 2m}{3} = k$$

farz edelim ki burada k yine gayr-i muayyen bir aded-i tâmdır. Bu hâlde de yine şu aşağıdaki iki münasebet husûle gelir:

$$y = -m + k \quad (2)$$

$$2 - 2m = 3k$$

Bu son muâdele de yukarıki iki muâdelenin aynıdır; fakat her ikisinden de basittir. Bu son muâdeleyi de m meçhulüne göre halledelim:

$$m = \frac{2 - 3k}{2}$$

olur. Bundan:

$$m = 1 - k - \frac{k}{2}$$

olur ki, burada da (m)nin tam olması, $\frac{k}{2}$'nin tam olmasına bağlıdır. Öyle ise eğer:

$$\frac{k}{2} = n$$

farz edersek, şu aşağıdaki iki ifâde-i nihâiyyeyi elde etmiş oluruz:

$$m = 1 - k - n \quad (3)$$

$$k = 2n \quad (4)$$

Bunlara nihâî dedik. Çünkü burada n adedine tam olarak bir aded versek, k da aded-i tâm bir kıymet alır. Bundan sonra müsâvîler (3) münasebetinde mahallerine konduğu gibi m gayr-i muayyeni de aded-i tâm bir kıymet alır. İşte böylece aşağıdan yukarıya doğru gidilerek görülür ki x ve y gayr-i muayyenleri de a'dâd-ı tâmme olarak kıymet alırlar.

İşte x ve y meçhulleri n kemmiyyet-i gayr-i muayyenesine şu aşağıdaki dört muâdele ile bağlıdır.

$$x = 14 - 2y + m \quad (1)$$

$$y = -m + k \quad (2)$$

$$m = 1 - k - n \quad (3)$$

$$k = 2n \quad (4)$$

Bu dört münasebet de (k)nın müsâvîsi (3)te mahalline, m'nin müsâvîlerini 2'de yerine, sonra m ve y kemmiyyetlerinin müsâvîlerini de (1)'de mahalline koysak bu vasıta ile ara yerde bulunan k ve m yardımcı gayr-i muayyenleri aradan kalkarak şu aşağıdaki esaslı iki ifade vücuda gelir:

$$x = 17 - 13n, \quad y = 5n - 1$$

Burada n kemmiyyetine $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ *ilh*. a'dâd-ı tâmmeleri müsbet ve menfi kıymetler verilerek x ve y gayr-i muayyenleri için de mukabil müsbet ve menfi kıymetler elde edilmiş olur:

$$n = 0, \quad x = 17, \quad y = -1$$

$$n = 1, \quad x = 4, \quad y = 4$$

$$n = 2, \quad x = -9, \quad y = 9$$

$$n = 3, \quad x = -22, \quad y = 14$$

...

Burada dikkat edilirse görülür ki x ve y gayr-i muayyenleri için hem tam hem de müsbet yalnız $n = 1$ farzına göre $x = 4,\ y = 4$ kıymetlerinden başka kıymet yoktur. Bu da şu muhakemeden pek güzel istidlâl olunur:

$17 - 13n$ ifadesinde yalnız n'ye (0) ve (1) kıymetleri verilirse bu ifade müsbet adedler verir. Fakat (-1)'den nâkıs nâ-mütenâhîye kadar kıymetlerin kâffesi için de bu ifade a'dâd-ı müsbete vücuda getirir. Hâlbuki $5n - 1$ ifadesinde n kemmiyyetine (1)'den bed' ile nâ-mütenâhîye kadar a'dâd verilirse müsbet adedler husûle getirir. Öyle ise yalnız $n = 1$ olduğuna göre bu iki ifadenin her ikisi de müsbet olarak tam adedler verip (n)'nin sair kıymetleri için x ve y kıymetlerinin her ikisinin de aynı zamanda müsbet kıymet almaları muhaldir.

60. İki meçhulü hâvî tek bir muâdelenin halli için yapageldiğimiz muamele ve usule iyice dikkat olunursa anlaşılır ki bu gibi muâdelâtın kâffesi – ne şekilde olursa olsun – halledilebilir. Çünkü bu usul lâyıkı vechile nazar-ı dikkat ve itinaya alınarak muhakeme edilirse görülür ki icra edilen taksîmler sayesinde elde edilen meçhullerin hep emsalleri gittikçe küçülmekte ve nihayet bir meçhulün olsun emsali behemehâl vâhide ircâ edilmektedir.

Yedinci Fasıl

(Küsûrât-ı Mütevâliye Nazariyyesi) / Ta'rifât ve Ma'lûmât-ı İbtidâiyye

61. Küsûrât-ı mütevâliyenin mucidi "Lord Brouncker" tanınmış ise de küsûrât-ı mezkûrenin havâss-ı meşhûresinin pek kıymettar menâfiinin kâşifi "Huygens" nam âlimdir (1682).

Küsûrât-ı mütevâliye nazariyyesi, malum bir adedin en takribî kıyem-i muhtelifesini ihtara yardım eder ve işte bundan dolayı bu kesirler bittabi ulûm-ı riyâziyyenin tahlîlât kısmına dâhil olmuştur.

Evvel-emirde tenvîr-i ezhân için bir misal irâesiyle işe girişelim:

Bi'l-farz $\frac{381}{266}$ aded-i ma'lûmunun kıymet-i takrîbiyyesini bulmak için bunu küsûrât-ı mütevâliyeye tahvil etmek matlûb olsun. Şöylece yapmalı:

Evvela sureti mahrec üzerine taksîm edip bunu şu vechile yazmalı:

$$\frac{381}{266} = 1 + \frac{1}{\frac{266}{115}}$$

Ba'dehu $\frac{266}{115}$ adedi hakkında da aynı muameleyi icra etmeli:

$$\frac{266}{115} = 2 + \frac{1}{\frac{115}{36}}$$

Ve keza:

$$\frac{115}{36} = 3 + \frac{1}{\frac{36}{7}}$$

Ve yine:

$$\frac{36}{7} = 5 + \frac{1}{7}$$

olur. Şimdi sırasıyla müsâvîleri mahallerine koyalım:

$$\frac{381}{266} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \frac{1}{7}}}}$$

İşte $\frac{381}{266}$ ifade-i kesriyşesi, böylece bir kesr-i mütevâlîye tahvil edilmiş oldu. Şimdi umumî bir tarzda kesr-i mütevâlînin şeklini arayalım, bulalım:

N herhangi bir aded-i kesrîyi ifade eylesin ve bunun kıymet-i takrîbiyyesini bulmak matlûb olsun. Bundaki en küçük aded-i tâmmı f ile gösterelim ve y adedi de (1)'den a'zam olsun. Bu hâlde:

$$N = f + \frac{1}{y}$$

münasebeti hâsıl olur. Burada y adedinin de b aded-i tâmmını bularak ve yine z adedini 1'den a'zam farz ederek:

$$y = b + \frac{1}{z}$$

bulunur. Eğer c de z adedinde dâhil en büyük aded-i tâm ise ve u da 1'den a'zam ise bu hâlde:

$$z = c + \frac{1}{u}$$

ve

$$u = d + \frac{1}{v} \ ilh \ldots$$

münasebetleri bulunmuş olur.

Şimdi N ifadesinde y, z, u kemmiyyetlerinin kıymetleri müteakiben mahallerine vaz' edilse, N adedinin kıymeti şu aşağıdaki şekilde tezahür etmiş olur:

$$N = f + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{v}}}} \quad \ldots [1]$$

Şu yukardaki ameliyata devam edilirse, iki hâlin zuhuru muhtemeldir. Birinci hâl: y, z, u, v adedlerinden biri aded-i tâm olabilir. Bu faraziyeye göre ameliyat nihayete ermiş, yani kesilmiş olur. Bu hâlde, N adedinin tamamen kesr-i mütevâlîye tevsî'i mümkündür denir.

İkinci hâlde ise y, z, u, v adedlerinden hiçbiri tam olarak zuhur etmez ve bu hâlde ise ameliyat münkati olmayarak bir sûret-i gayr-i mahdûdede – her ne kadar (1) müsâvâtı daima mevcut ise de – uzayıp gider. Ve eğer $\frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{n}, \frac{1}{v}, \ldots$ kesirlerinden biri hazf olsa bu müsâvât takribî olur ki, bu hâlde N adedi için bir takım kıyem-i takrîbiyye elde edilir ve bunlara [mürcia‘] yahut [küsûrât-ı mütekâribe] namı verilir.

Burada birinci mürcia‘ [$\frac{1}{y}$’den sarf-ı nazar edilerek] f’dir. İkinci mürcia‘[$\frac{1}{z}$’den sarf-ı nazar olunarak] $f+\frac{1}{b}$’dir. Üçüncü mürcia‘ [$\frac{1}{n}$’den sarf-ı nazarla] $f+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}$’dir; ve hakeza:

$y, z, u, \ldots$ mahrec-i müteâkibleri tam hâric-i kısmetlerdir. Hâlbuki bu mahreclerin yalnız kısm-ı tâmlarını irâe eden $b, c, d, \ldots$ adedleri de gayr-i tâm hâric-i kısmetlerdir. $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \ldots$ kesirlerine de “küsûrât-ı mütemmime” ismi verilir.

Görülüyor ki $b, c, d, \ldots$ gayr-i tâm hâric-i kısmetleri en aşağıdan vâhide müsâvî müsbet a’dâd-ı tâmmedir. Yalnız, f, eğer N adedi vâhidden dûn olursa, sıfıra müsâvîdir.

62. Her müşterekü’l-mîzân aded, mahdud bir kesr-i mütevâlîye tevafuk eder. Ve her kesr-i mütevâli-yi mahdûd da müşterekü’l-mîzân bir adedi ibraz eyler.

Zîrâ, farz edelim ki $\frac{b}{c}$ müşterekü’l-mîzân bir adeddir. B adedini c üzerine taksîm edelim. Bu taksîmde h hâric-i kısmeti, r de bâkîyi göstersin. Bu hâlde:

$$\frac{b}{c}=h+\frac{r}{c}=h+\frac{1}{\frac{r}{c}}$$

müsâvâtı hâsıl olur. Kezalik c adedini r üzerine taksîm edelim. Bunda da hâric-i kısmet h ve bâkî de r olsun. Bu hâlde:

$$\frac{c}{r}=h'+\frac{r'}{r}=h'+\frac{1}{\frac{r}{r'}}$$

müsâvâtı husûle gelir. Bu minval üzere devam olunursa anlaşılır ki, yapılan ameliyat tıpkı b ile c adedlerinin kâsım-ı müşterek-i a‘zamlarını taharrî için yapılan ameliyatın aynıdır. Hatta bu b ve c adedleri mütebâyin bile olsalar, nihayet bir bâkîye dest-res olunur ki, o da sıfırdan ibarettir.

Bundan anlaşılır ki $\frac{b}{c}$’nin tevsî‘ini irâe eden kesr-i mütevâlî mahdud haddlere maliktir.

Kâsım-ı müşterek ameliyatında ihtar edilen hâric-i kısmetler $b, c, d, \ldots$ gayr-i tâm hâric-i kısmetleri tanıtır. Bunların ma’kûsları olan $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \ldots$ ifadeleri de (küsûrât-ı mütemmime)yi gösterir.

Bilakis bir kesr-i mütevâli-yi mahdûd farz edelim. Bunun müşterekü’l-mîzân bir adedi irâe ettiğini ispat etmek için küsûrât-ı mütemmime ile gayr-i tâm hâric-i kısmetlerden başlayarak irâe olunan ameliyatı yapmakla iki haddi, yani sureti ile mahreci bir aded-i tâmdan ibaret bir kesr-i âdîye vasıl olunacağı şüphesizdir. Tenvîr-i efkâr için adedî bir misal ile alalım:

$$N = 3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9}}}$$

müteakiben şu ifadeler elde edilir:

$$7 + \frac{1}{9} = \frac{64}{9}$$

$$5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9}} = 5 + \frac{9}{64} = \frac{329}{64}$$

$$N = 3 + \frac{64}{329} = \frac{1051}{329}$$

63. Her kesr-i mütevâlîde, mürcia‘ların kıymetleri, asıl kesr-i mütevâlî kıymetinden, münâvebeten asgar ve a‘zamdır. Tek sıra mürcia‘lar, kesr-i mütevâlîden asgar, çift sıra mürcia‘lar ise kesr-i mütevâlîden a‘zamdır. Zîrâ, şu kesr-i mütevâlîyi tasavvur edelim:

$$N = f + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cdots}}}$$

Bu kesr-i mütevâlî aşağıdaki müsâvâtlardan müteakiben husûle gelmiştir:

$$N = f + \frac{1}{y} \qquad y > 1$$

$$y = b + \frac{1}{z} \qquad z > 1$$

$$z = c + \frac{1}{u} \qquad u > 1$$

$$u = d + \frac{1}{v} \qquad v > 1$$

...

Şimdi N yerine f alınmış olsak $\frac{1}{y}$ kesrini ihmal etmiş oluruz ki, bu hâlde $N > f$ olur.

Eğer N yerine $f + \frac{1}{b}$ alınmış olsa:

$$N = f + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{z}}$$

ifadesinde $\frac{1}{z}$ kesri ihmal edilmiş olur ki, bu hâlde kesr-i mütemmimin mahreci tenkis edilmekle kıymeti tezayüd eder; bu sebepten $N < f + \frac{1}{b}$ olur. Ve yine,

$$f + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$$

ifadesi N yerine alınacak olursa,

$$N = f + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{u}}}$$

ifade-i tâmmesinde $\frac{1}{u}$ terk ediliyor. Öyle ise $\frac{1}{c+\frac{1}{u}}$ kesrinde mahrec tenkis ve bu cihetle de bu kesrin kıymeti tezyid edilmiş oluyor. Bu sebepten:

$$\cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{u}}}$$

kesrinin mahreci ziyadeleştiriliyor. Yani bu kesrin kıymeti tenkis edilmiş oluyor. Bu takdirce:

$$N > f + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$$

olmak lazım gelir. Kezalik N yerine:

$$f + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + d}}$$

alınsa:

$$N = f + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{v}}}}$$

ifâde-i tâmmesinde $\frac{1}{v}$ terk olunuyor. Bu hâlde $\frac{1}{d+\frac{1}{v}}$ kesri tezyid ediliyor. Bununla beraber

$$\cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{v}}}$$

kesri tenkis edildiğinden:

$$\cfrac{1}{b + \cfrac{1}{v}}$$

kesri tezyid edilmiş olur. Bu sebepten:

$$N < f + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}$$

oluyor. İşte bu muhakemât aynı vech ile yürütülerek da'vanın sübutu tahakkuk etmiş olur.

Bu kaziye şöylece de ifade olunabilir: Her kesr-i mütevâlînin kıymeti, bizzarûre, "iki mürcia'-i müteâkibe" beyninde bulunur.

Mürcia'ların Teşkilât Kanunu

64. Keyfe-me'ttefak şu kesr-i mütevâlîyi alalım:

$$x = f + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cdots}}}$$

Burada ilk dört mürcia'yı hesâb edeceğiz ve bundan, teşkilâta ait bir kanunun mevcudiyetini arayacağız.

Birinci mürcia': f veya $\frac{f}{1}$'dir.

İkinci mürcia': $f + \frac{1}{b} = \frac{bf+1}{b}$'dir.

Üçüncü mürcia': $f + \frac{1}{b+\frac{1}{c}} = f + \frac{c}{bc+1} = \frac{fbc+f+c}{bc+1}$'dir.

Dördüncü mürcia': $f + \frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}} = f + \frac{1}{b+\frac{d}{cd+1}} = f + \frac{cd+1}{bcd+b+d} = \frac{fbcd+cd+fd+fb+1}{bcd+d+b}$'dir.

Üçüncü ve dördüncü mürcia'ları tasavvur edersek, görürüz ki, her mürcia', tevakkuf edilen gayr-i tâm hâric-i kısmeti, kendinden evvel gelen mürcia'nın her iki haddine darb edilerek hâsıl-ı darb, kendinden iki sıra evvel gelen mürcia'nın haddlerine mütenâzıran zam olunarak vücuda geliyor.

Bu kanunun umumî olduğunu ispat etmek icap eder; yani, herhangi üç mürcia'-ı müteâkibe hakkında sahih olan bu kanun, bu üç mürcia'dan sonra gelen mürcia' hakkında da sahihtir. Bunun böyle olduğunu ispat edelim:

$\frac{r}{r'}, \frac{q}{q'}, \frac{t}{t'}$ üç mürcia‘-ı müteâkibe olsun ve kanunun bu üç mürcia‘ hakkındaki ahkâmı sahih olsun. f adedini $\frac{r}{r'}$ mürcia‘sına râci‘ son gayr-i tâm hâric-i kısmet farz edelim.

Bu hâlde şu münasebetlerin doğru olduğunu farz etmiş olduk:

$$\left.\begin{aligned} r &= qf + t \\ r' &= q'f + t' \end{aligned}\right\} \frac{r}{r'} = \frac{qf + t}{q'f + t'}$$

Şimdi $\frac{r}{r'}$’den sonra gelen $\frac{x}{x'}$ mürcia‘sına geçmek için, şuna dikkat etmek lazımdır ki, bu son mürcia‘nın $\frac{r}{r'}$’den farkı f yerine $f + \frac{1}{m}$ koymaktan ibarettir. m adedi f’den sonra gelen gayr-i tâm hâric-i kısmettir. O hâlde şu münasebât husûle gelir:

$$\frac{x}{x'} = \frac{q(f + \frac{1}{m}) + t}{q'(f + \frac{1}{m}) + t'} = \frac{(qf + t)m + q}{(q'f + t')m + q}$$

Yani:

$$\frac{x}{x'} = \frac{rm + q}{r'm + q'}$$

olur.

İşte yukarda beyan olunan teşkilat kanununun umumî olduğu böylece sübut bulmuş olur.

65. Bu kanunu tatbik etmek için ilk iki mürcia‘nın teşekkül etmiş bulunması lazımdır. Lakin ikinci mürcia‘yı, beyan edilen kaideye tatbiken mevki-i fi’le çıkarmak için baş tarafa $\frac{1}{0}$ mürcia‘-ı izâfiyyesini idhâl etmek kâfidir. Bu hâlde kaidemize tatbiken, bu mürcia‘-ı izâfiyye, birinci mürcia‘-ı hakîkiyye olan $\frac{\mathrm{f}}{1}$ ile terkip olunarak ikinci mürcia‘nın kıymeti olan $\frac{\mathrm{fb}+1}{\mathrm{b}}$ ifadesini vermiş olur.

İşte mürcia'ların suver-i teşkîliyyelerini teshil için şu aşağıdaki algoritmayı tatbik etmelidir:

	f	b	c	d
$\frac{1}{0}$	$\frac{f}{1}$	$\frac{bf+1}{b}$	$\frac{bfc+c+f}{bc+1}$	$\frac{bfcd+dc+df+bf+1}{bcd+d+b}$

Bir hatt-ı ufkî üzerine $f, b, c, d, \ldots$ gayr-i tâm hâric-i kısmetlerini vaz' ederiz; sonra bir sıra geriye $\frac{1}{0}$ mürcia'-ı izâfiyyeyi yazarız ve birinci mürcia'yı da hatt-ı ufkînin altına ve birinci gayr-i tâm hâric-i kısmetin tahtına vaz' ederiz. Bundan sonra, yukarda tarif ettiğimiz kaideye tatbiken, müteakiben diğer mürcia'ları teşkil eyleriz.

Mürcia'ların Havâss-ı Esâsiyyesi

66. Da'vâ-yı Nazarî: Mürcia'lar yukarda tarif olunan kaideye tevfîkan teşekkül etmiş ve $\frac{p_n}{q_n}$ de bir sûret-i umûmiyyede $n+1$ sırasındaki mürcia'yı irâe eylemiş farz edilse, şu:

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n \quad \ldots (B)$$

münasebeti husûle gelir.

Zîrâ f_{n-1}, n. gayr-i tâm hâric-i kısmet olsa,

$$p_n = p_{n-1}.f_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_n = q_{n-1}.f_{n-1} + q_{n-2}$$

münasebetleri tahaddüs eder. Bu müsâvâtların birincisini q_{n-1} ve ikincisini de $-p_{n-1}$ ile darb ettikten sonra mecmûları alınmış olsa, şu:

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = -(p_{n-1}.q_{n-2} - q_{n-1}.p_{n-2})$$

münasebeti elde edilir. Bu münasebetten istintaç olunur ki:

$$(-1)^n (p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1})$$

ifadesi, n adedi ne olursa olsun, aynı kıymete maliktir. Her iki mürcia‘-ı müteâkibeden birincinin suretiyle ikincinin mahreci ve keza birincinin mahreciyle ikincinin sureti hâsıl-ı darbları beynindeki fazl (± 1)'de müsâvîdir. Eğer ilk mürcia‘nın sırası çift ise tefâzul $(+1)$ ve eğer tek ise (-1)'dir.

Bu nazariyye şöylece de ispat olunur:

	a	a_1	a_2
$\frac{1}{0}$	$\frac{a}{1}$	$\frac{aa_1+1}{a_1}$	$\frac{aa_1a_2+a_2+a}{a_1a_2+1}$

Netice 1: P_n ve φ_n adedleri mütebâyineyn olduklarından $\frac{P_n}{\varphi_n}$ kesri bir mürcia‘dan ibarettir.

Zîrâ, (B) ifadesinden müstebân olur ki, P_n ve φ_n adedleri hiçbir kâsım-ı müştereke malik değillerdir. P_{n-1} ve φ_{n-1} de böyledir. Eğer öyle olmasa, o kâsımın $(-1)^n$'yi de taksîm etmesi lazım gelir ki bu hilâf-ı hakîkattir.

Netice 2: İki mürcia‘-ı müteâkibenin beynindeki fazl, bir kesre müsâvîdir ki bu kesrin sureti vâhidden ve mahreci ise bu iki mürcia‘nın mahrecleri hâsıl-ı darbından ibarettir. Zîrâ (B) müsâvâtını $\varphi_n \varphi_{n-1}$ hâsıl-ı darbı ile taksîm etmiş olsak:

$$\frac{P_n}{\varphi_n} - \frac{P_{n-1}}{\varphi_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{\varphi_n \varphi_{n-1}}$$

münasebeti elde edilmiş olur ki da'vamız da bununla sabit olmuş olur.

Murabba'-ı Tâm Olmayan Bir Adedin Cezr-i Murabba'ının Kesr-i Mütevâlîye Tevsî'i

67. Bundan evvel herhangi bir kemmiyyet olursa olsun (müşterek'ül-mîzân olmak şartıyla) kesr-i mütevâlîye tevsî'i hakkında verilen malumat, â'dâdın cezr-i murabba'larına da sühûletle tatbik olunabilir ve bir sûret-i umûmiyyede $\frac{\sqrt{A}+B}{C}$ ifadesine kâbil-i tatbîktir (A, B, C adedleri tam olmak şartıyla).

Lakin ameliyatın tarz ve revişini, bir sûret-i vâzıhada görmek, anlamak için hususi bir misal, bir misâl-i adedî irâe etmeyi münasip addeyledik.

$A = 19$ olsun;

$$x = \sqrt{19} = 4 + \frac{1}{x'}$$

Bundan:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{19} - 4}$$

Yahut:

$$x' = \frac{\sqrt{19} + 4}{3}$$

husûle gelir. Bu kemmiyyette dâhil en büyük hâric-i kısmet 2'dir. Binaenaleyh,

$$x' = \frac{\sqrt{19}-2}{3} + 2$$

olur. $\frac{\sqrt{19}-2}{3}$ ifadesi: $\frac{1}{x''}$ ile irâe olunsa:

$$x'' = \frac{3}{\sqrt{19}-2} = \frac{\sqrt{19}+2}{5}$$

Şu aşağıdaki suver-i ameliyye, kaideyi vazıh surette gösterir.

$$x = \sqrt{19} = 4 + \frac{\sqrt{19}-4}{1}$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{19}-4} = \frac{\sqrt{19}+4}{3} = 2 + \frac{\sqrt{19}-2}{3}$$

$$x'' = \frac{3}{\sqrt{19}-2} = \frac{\sqrt{19}+2}{5} = 1 + \frac{\sqrt{19}-3}{5}$$

$$x''' = \frac{5}{\sqrt{19}-3} = \frac{\sqrt{19}+3}{2} = 3 + \frac{\sqrt{19}-3}{2}$$

$$x^{\iota v} = \frac{2}{\sqrt{19}-3} = \frac{\sqrt{19}+3}{5} = 1 + \frac{\sqrt{19}-2}{5}$$

$$x^{v} = \frac{5}{\sqrt{19}-2} = \frac{\sqrt{19}+2}{3} = 2 + \frac{\sqrt{19}-4}{3}$$

$$x^{v\iota} = \frac{3}{\sqrt{19}-4} = \frac{\sqrt{19}+4}{1} = 8 + \frac{\sqrt{19}-4}{1}$$

$$x^{v\iota\iota} = \frac{1}{\sqrt{19}-4} = \frac{\sqrt{19}+4}{3} = 2 + \cdots ilh$$

Bu hadde vasıl olununca görülüyor ki, $x^{v\iota\iota}$'nin kıymetinden x' kıymetine müsâvî bir ifadeye düşülmüş oluyor. Bundan neşet eder ki, evvelce bulunmuş olan $2, 1, 3, 1, 2, 8$ hâric-i kısmetleri yine aynı tarzda zuhur ederek devredeceklerdir. Bu cihetle $\sqrt{19}$'un kesr-i mütevâlîye tevsî'inde şu hâric-i kısmetler tahaddüs edeceklerdir:

$$4: 2, 1, 3, 1, 2, 8;\ 2, 1, 3, 1, 2, 8;\ 2, 1, 3, 1, 2, 8; \dots ilh$$

Burada görülüyor ki ilk hadd olan 4'ten sonra $2, 1, 3, 1, 2, 8$ devri aynı sırada zuhur ederek nâ-mütenâhî tekerrür edip gidiyor.

68. Şimdi A keyfe-me'ttefak bir aded olsun. a^2 de bu A adedinde dâhil en büyük hâric-i kısmeti irâe eylesin. b de bâkî olsun; şu şart ile ki, $A = a^2 + b$ münasebetini husûle getirsin: $\sqrt{A}$ kesr-i mütevâlîye tevsî' edilirse, evvel-emirde,

$$x = \sqrt{A} = a + \frac{\sqrt{A} - a}{1} = a + \frac{1}{x'}$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{A} - a} = \frac{\sqrt{A} + a}{A - a^2} = \frac{\sqrt{A} + a}{b} \dots ilh$$

olur.

Farz edelim ki, ameliyatı nâ-mütenâhî olarak temdit ettik ve x^n yahut

$$y = \frac{\sqrt{A} + I}{D}$$

hâric-i kısmet-i tâmmına vasıl olduk. y'de dâhil olan aded-i tâm μ olsun. Bu hâlde,

$$y = \frac{\sqrt{A} + I}{D} = \mu + \frac{1}{y'}$$

ifadesi elde edilir. Bundaki bâkî ise

$$\frac{1}{y'} = \frac{\sqrt{A} + I - D\mu}{D}$$

olur. Bundan:

$$y' = \frac{D}{\sqrt{A} + I - \mu D}$$

istihraç edilir ve mademki eşkalin müşabeheti:

$$y' = \frac{\sqrt{A} + I'}{D'}$$

olmasını istilzam ediyor; bundan şu aşağıdaki muâdeleye dest-res olunur:

$$\frac{D'}{\sqrt{A} + I - \mu D} = \frac{\sqrt{A} + I'}{D'}$$

Bu muâdelede, asammlar asammlara, muntaklar da muntaklara müsâvî olmak şartıyla tefrik olunsa, şu:

$$I' = \mu D - I \quad \ldots (m)$$

$$D' = \frac{A - I''}{D} \quad \ldots (n)$$

münasebâtı elde edilir.

İşte $\frac{\sqrt{A}+I}{D}$ hâric-i kısmet-i tâmmından, bundan sonra gelen $\frac{\sqrt{A}+I'}{D'}$ hâric-i kısmet-i tâmmını istihraç etmek için en basit kanun.

I' ve D' adedlerinin kesir olarak zuhur etmesinden de şüphe edilmez. Zîrâ, I' kemmiyyetinin müsâvîsi D''de mahalline vaz‘ edilse,

$$D' = \frac{A-(\mu D - I)^2}{D} = \frac{A-I^2}{D} + 2\mu I - \mu D \quad \dots (H)$$

olur. İmdi,

$$A - I'^2 = D'D$$

müsâvâtı elde edilip eğer $\frac{\sqrt{A}+I}{D}$ ifadesini takaddüm eden hâric-i kısmet-i tâm $\frac{\sqrt{A}+I}{D^0}$ ile gösterilmiş olsa aynı müşabehet tarikiyle

$$A - I^2 = DD^0$$

münasebeti husûle gelir. (H) müsâvâtında müsâvîler mahalline vaz‘ edilmiş olsa,

$$D' = D^0 + 2\mu I - \mu^2 D$$

Burada görülüyor ki, ilk iki hâric-i kısmet olan $\frac{\sqrt{A}+a}{b}, \frac{\sqrt{A}+0}{1}$ ifadesinde D ile I aded-i tâmdır. Sairlerin kâffesinde de tam olarak zuhur edeceğinde de şüphe yoktur.

D' için bulunan kıymet, şu şekilde konabilir:

$$D' = D^0 + \mu(2I - \mu D)$$

Yahut:

$$D' = D^0 + \mu(I + I - \mu D)$$

olup m müsâvâtı (-1) ile darb olunup burada mahalline vaz‘ edilse

$$D' = D^0 + \mu(I - I')$$

olur. Bu vech ile şu:

$$+\mu^0 = \frac{\sqrt{A} + I^0}{D^0}$$

$$+\mu = \frac{\sqrt{A} + I}{D}$$

İki hâric-i kısmet-i tâmm-ı müteâkibden, bunlardan sonra gelen $\frac{\sqrt{A}+I'}{D'}$ hâric-i kısmet-i tâmmı şu düsturlarla elde edilir:

$$I' = \mu D - I, \qquad D' = D^0 + \mu(I - I')$$

İşte bunlar devam kanununu son derece basit bir hâle getirmiş oluyorlar.

$ax + by = c$ Şeklindeki Muâdelelerin Küsûrât-ı Mütevâliye Nazariyyesi ile Halleri

69. Malumdur ki, $\frac{a}{b}$ tarzında (a ile b adedleri mütebâyindir) bir ifadenin küsûrât-ı mütevâliyeye ircâı hallinde:

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}$$

gibi bir takım mürcia‘lar elde edilir ki, bu silsilede son $\frac{p_n}{q_n}$ mürcia‘sı $\frac{a}{b}$’den başka bir şey değildir. Bu son kesirden maada sair küsûrâtın her biri $\frac{a}{b}$ kesr-i aslîsinin bir kıymet-i takrîbiyyesini verir.

Bundan başka bu mürcia‘lardan her iki mürcia‘-i müteâkibenin fazlları alınırsa (mahrec-i müştereke ircâ edilerek tarh ameli de icra olunmalı) husûle gelecek kesrin sureti mutlak (± 1)’dir. Yani umumî olarak son iki mürcia‘ için bu tarh amelini yapalım:

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n q_{n-1}}$$

İşte bu son kesirden:

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n \quad \dots (k)$$

münasebeti zuhur eder ki burada n adedi $\frac{p_n}{q_n}$ kesrinin sırasını yani çift veya tek sırada olduğunu gösterir. Eğer n çift sırada ise (k) ifadesi (-1) ve eğer n tek sırada ise mezkûr ifade $(+1)$ verir.

İşte küsûrât-ı mütevâliyeden bu kadarcık malumat ile muâdelemizi halledebiliriz. Biz burada daima yukardaki muâdeleyi halledeceğiz ki yapılan muhtelif usuller beynindeki farklar kolaylıkla tezahür etsin:

$$5x + 13y = 72$$

gayr-i muayyenlerin emsalleri daima mütebâyin olacak. Böyle bir muâdelede, gayr-i muayyenlerin emsallerinden herhangisi olur ise olsun suret intihap olunabilse de büyüğü suret, küçüğü mahrec olmak üzere alınmakta faide vardır. Burada $\frac{13}{5}$ kesri alınır. Bu kesrin sureti ile mahrecini gösteren adedlerin – taksîm-i mütevâlî ile – kâsım-ı müşterek-i a‘zamı taharrî olunur, yani şöyle yapılır:

	2	1	1	2
13	5	3	2	1
3	2	1	0	

Birinci hatt-ı ufkînin üstünde bulunan: $2, 1, 1, 2$ adedler, taksîmlerden zuhur eden hâric-i kısmetlerdir ki $\frac{13}{5}$ kesrinin küsûrât-ı mütevâliyeye şöylece ircâ edilmesine vasıta olurlar:

$$\frac{13}{5} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$

küsûrât-ı mütevâliyede mürcia'ları bulmak için şu aşağıdaki (algoritma) kullanılır:

	2	1	1	2
1	2	3	5	13
0	1	1	2	5

Buradaki $\frac{1}{0}$ şekli (algoritma) kanununu usulü dairesinde muhafaza etmek için izâfî, itibârî bir mürcia'dan ibarettir ki buna Frenkler [Réduite fictive] derler. Burada son iki mürcia'yı alacak olsak, yukarda tarif ettiğimiz iki mürcia'-ı müteâkibenin suretleri beynindeki fazl (± 1) olduğuna göre:

$$5.5 - 13.2 = -1$$

münasebetini buluruz. Şimdi burada muâdelemizi göz önüne alalım da ona göre bu münasebeti tanzim edelim. Muâdelemiz şu idi:

$$5x + 13y = 72$$

Yukardaki münasebeti bu muâdeleye benzetmek için, münâsebet-i mezbûrenin her iki tarafını (-1) ve 72 ile darb edelim:

$$13.2.72 - 5.5.72 = 72$$

olur.

Asıl muâdelede gayr-i muayyenlerin emsalleri müsbet olduğundan bunu nazar-ı itibara alarak, münasebeti şöylece tanzim edelim:

$$5.(-5.72) + 13.(2.72) = 72$$

İşte bu son müsâvâta nazar-ı dikkati nasp edersek görürüz ki, birinci parantez içindeki (-5.72) hâsılı (x)in, ikinci parantez dâhilindeki (2.72) hâsıl-ı darbı da (y)nin kıymetleridir. Yani:

$$x = -5.72 = -360$$

$$y = 2.72 = 144$$

tür.

x ve y kemmiyyetlerinin şu bulageldiğimiz müsâvîleri asıl muâdelede yerlerine konulsa, gerçi tevafuk ettikleri görülürse de, burada x ve y gayr-i muayyen olduklarından lâ-yuadd kıymetleri olmak iktiza eder ki, bunun için yukardaki bulduğumuz müsâvâtları şu hâle ircâ etmek iktiza eyler:

$$x = -360 + 13m$$

$$y = 144 - 5m$$

x ve y kemmiyyetlerinin en küçük kıymetlerini bulmak için m gayr-i muayyen kemmiyyetine öyle münasip kıymet verilmelidir ki, x gayr-i muayyeninin ilk kıymeti m'nin emsali olan 13 adedinin nısfından asgar olsun.

İşte burada $-\frac{360}{13}$ taksîminden hâric-i kısmet 28 olarak verilirse:

$$x = 4 + 13m$$

olup y için de m'ye aynı 28 kıymeti verilmelidir. O da:

$$y = 4 - 5m$$

olur. İşte şu:

$$x = 4 + 13m$$

$$y = 4 - 5m$$

münasebetlerinde m kemmiyyetine $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots ilh$ silsile-i a'dâd-ı tabîiyyenin müsbet veya menfi herhangisi olursa olsun verilmiş olsa, asıl muâdeleye tevafuk edecek x ve y kemmiyyetleri için layık kıymetler elde edilmiş olur.

Şimdi gelelim, yukardaki x ve y gayr-i muayyenlerinin ilk kıymetlerine $13m$ ve $5m$ miktarlarının suret-i idhâlini ispata:

$$ax + by = c \quad \ldots (k)$$

Bu muâdelede a ile b adedleri mütebâyindir.

Bu hâlde $\frac{a}{b}$ kesrini küsûrât-ı mütevâliyeye ircâ ederek x ve y için birer kıymet buluruz. Nasıl ki yukarda böyle yaptık ve birer kıymet bulduk.

Farz edelim ki bulduğumuz kıymetler:

$$x = h, \qquad y = d$$

olsun. Bu kıymetleri (k) muâdelesinde mahalline vaz‘ edelim ve bu ikinci muâdeleyi birincinin altına yazalım:

$$ax + by = c$$

$$ah + bd = c$$

olup bu iki müsâvâttan:

$$ax + by = ah + bd$$

müsâvâtı husûle gelir. Bundan:

$$a(x - h) = b(d - y)$$

olup bundan da:

$$\frac{a}{b} = \frac{d - y}{x - h}$$

müsâvâtı hâsıl olur.

$\frac{a}{b}$ kesri a ile b mütebâyin olduklarından gayr-i kâbil-i ihtisâr bir kesirdir. Bu hâlde $(d-y)$, a'nın ve $(x-h)$ adedi de b'nin misilleri olmak zaruridir. Öyle ise:

$$m.a = d - y$$

$$m.b = x - h$$

olur. x ile y halledildikte:

$$\left.\begin{aligned} x &= m.b + h \\ y &= d - m.a \end{aligned}\right\} \dots (t)$$

olup matlûb sabit olur.

İhtar: Şu cihete dikkat etmelidir ki, eğer halli matlûb muâdelede a veya b'den birisi menfi olursa ve mesela muâdele:

$$ax - by = c$$

şeklinde bulunursa, bu hâlde (t) münasebetlerinin tekmil haddlerinin müsbet olduğu görülür; yani şöyle olur:

$$\begin{aligned} x &= h + m.b \\ y &= d + m.a \end{aligned}$$

***

70. Aynı muâdeleyi bir de Alman meşâhir-i riyâziyyûnundan "Gauss"un vaz' etmiş olduğu müteâdil usulü ile halledelim:

$$5x + 13y = 72$$

Bunu müteâdile tahvil eyleyelim:

$$5x \equiv 72 \ (muaddil\ 13)$$

Bu müteâdilin sağ tarafından (13) muaddilinin (5) mislini tarh edelim:

$$5x \equiv 7(muaddil\ 13)$$

Yine sağ tarafına 13 muaddilini zam eyleyelim:

$$5x \equiv 20\ (muaddil\ 13)$$

5 adedi ile 13 adedi mütebâyin olduğundan tarafeyni 5 ile taksîm caizdir. Öyle yapalım:

$$x \equiv 4\ (muaddil\ 13)$$

Bu son müteâdili müsâvâta tahvil etsek:

$$x = 4 + 13m$$

olup asıl muâdelede (x)in bu müsâvîsini mahalline koyup da halletsek:

$$5(4 + 13m) + 13y = 72$$

olup bundan:

$$5.13m + 13y = 72 - 20 = 52$$

olur. Tarafeyn 13 ile taksîm edilse:

$$5m + y = 4$$

olup bundan da:

$$y = 4 - 5m$$

olmuş olur.

Dikkat olunur ise müteâdillerin ne kadar sühûletle muâdeleleri hallettikleri ve pek şümullü oldukları def'aten anlaşılmış olur. Çünkü $13m$ ve $5m$ adedlerini idhâl için yukarda yapıldığı gibi ayrıca ispata hacet olmayıp bunlar müteâdillerin usul ve kavâidi mûcibince kendi kendilerine x ve y kemmiyyetlerinin münasebetlerine dâhil olmaktadır.

Müteaddit Gayr-i Muayyenleri Hâvî Bir Muâdelenin Sûret-i Halli

Bundan evvel iki gayr-i muayyeni yani iki meçhulü hâvî tek bir muâdelenin suver-i halliyesini izah ve beyan etmiş ve buna ait umumi düsturları da bi'l-isbât istihraç eylemiş idik. Şimdi de, ikiden ziyade müteaddit meçhulleri, daha doğrusu gayr-i muayyenleri hâvi tek bir muâdelenin suret-i hallinden bahsedeceğiz.

Böyle bir muâdelenin şekl-i umûmîsi şudur:

$$ax + by + cz + \cdots + du + ev = m \quad \dots (1)$$

Burada $a, b, c, d, \dots, e$ emsalleri malum olarak a'dâd-ı tâmmeden ve $x, y, z, \dots, u, v$ kemmiyyetleri de meçhul veya gayr-i muayyen tam adedlerden ibarettir. Eğer $a, b, c, \dots, d, e$ adedleri mütebâyin değillerse, k bunların kâsım-ı müşterek-i a'zamı olsun. Eğer bu k kâsım-ı müşterek-i a'zamı m adedini tamamen taksîm etmezse, mesele gayr-i kâbil-i halldir. Yani a'dâd-ı tâmme olarak gayr-i muayyenler için kıymetler bulmak mümkün olamaz. Eğer k adedi m adedini de tamamen taksîm ediyorsa, bu hâlde tekmîl-i muâdeleyi bu k adedi ile taksîm ederiz. Sözün hülâsası şudur ki (1) gibi bir muâdelede emsaller daima mütebâyin farz olunabilir.

Şimdi beyan edeceğiz ki böyle bir muâdelenin halli hem mümkündür, hem de her ameliyede bir meçhul tenkis edilerek n kadar meçhulü hâvî bir muâdele evvelâ $n-1$ kadar meçhule, sâniyen $n-2$ meçhule ve $\dots ilh.$ 2 meçhullü bir muâdele heyetine ircâ edilebilir ki böyle iki meçhullü bir tek muâdelenin suver-i halliyyesini zaten öğrenmiş olduğumuzdan (1) muâdelesini kâmilen halletmiş oluruz.

Evvel-emirde (1) muâdelesini şu şekilde ifrağ ederiz:

$$ax + by + cz + \cdots + du = ev \qquad [2]$$

Eğer burada $a, b, c, \ldots, d$ adedleri mütebâyin iseler, v gayr-i muayyenine istenilebilen bir kıymet-i adediyye verilebilir. Bu hâlde muâdele $x, y, z, \ldots$ meçhullerini hâvi, yani asıl muâdeleden bir meçhul noksan bir muâdeleye ircâ edilmiş olur.

Yok; eğer $a, b, c, \ldots, d$ adedleri $k \neq 1$ gibi bir kâsım-ı müşterek-i a'zama malik iseler, yani bu emsallerin (1)den başka bir kâsım-ı müşterek-i a'zamı var ise bu hâlde:

$$m - ev \equiv 0 \ \ (muaddil\ k)$$

müteâdilini v gayr-i muayyenine göre hallederiz. Bu müteâdil ise e ile k adedleri mütebâyin olduklarından kâbil-i halldir. Bundan:

$$v = f + kw$$

gibi bir kıymet istihsal ederiz. Burada w yeni bir gayr-i muayyendir. v'nin bu kıymetini [2] muâdelesinde yerine koyalım; bu takdirce bu muâdelenin bütün haddleri k ile kâbil-i taksîm olur. İşte bu minval üzere hareket edilerek (1) muâdelesi nihayet iki meçhullü bir tek muâdeleye ircâ edilmiş olur.

Her şeyde tatbikat, ta'rîfattan ziyade tenvîr-i ezhâna yardım edegeldiği için biz de burada bir iki tatbikatla tavzîh-i merâma sa'y edeceğiz.

Mesele 1: Bir adam, Galata'da av eti satılan bir dükkâna gider. Serçenin tanesi 20 paraya, tavuğun tanesi 13 kuruşa, hindinin tanesi 42 kuruşa, ördeğin tanesi 29 kuruşa olduğunu anlar. 1800 kuruşluk bu muhtelif şikârdan almak için acaba beherinden kaçar tane almalıdır:

Şimdi burada x, y, z, u gayr-i muayyenleri ile serçenin, tavuğun, hindinin, ördeğin adedlerini göstermiş olsak, ber-mûcib-i mes'ele:

$$0{,}5x + 13y + 42z + 29u = 1800$$

muâdelesini kurmamız lazım gelir. Birinci gayr-i muayyenin emsalini tam kılmak için muâdeleyi (10) adediyle darb edelim:

$$5x + 130y + 420z + 290u = 18000$$

olur. Burada emsallerle hadd-i ma'lûmun kâsım-ı müşterek-i a'zamları 5'tir. Muâdelenin her haddini bu adedle taksîm edelim.

$$x + 26y + 84z + 58u = 3600$$

olur. Bu muâdeleyi:

$$26y + 84z + 58u = 3600 - x \qquad (3)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu muâdelenin sol tarafındaki emsallerin kâsım-ı müşterek-i a'zamı (2)'dir. Öyle ise:

$$3600 - x \equiv 0 \quad (muaddil\ 2)$$

müteâdilini halletmek iktiza eder; bu müteâdil:

$$x \equiv 3600 \ \ (muaddil\ 2)$$

tarzında da yazılabilir. 3600 adedinden 2'nin mümkün olabilen misilleri tarh edilse:

$$x \equiv 0\ (muaddil\ 2)$$

olur. Bu demektir ki x adedi 2 ile kâbil-i taksîmdir. Şöyle yazılır:

$$x = 2h$$

Burada h tam olarak bir aded-i gayr-i muayyeni gösterdiğinden buna istenilen tam kıymetler verilebilir:

$$h = 10$$

diyelim. Bu hâlde,

$$x = 20$$

olur. x'in kıymetini (3) muâdelesinde yerine koyalım:

$$26y + 84z + 58u = 3600 - 20 = 3580$$

olur. Her bir haddi 2 ile taksîm edelim:

$$13y + 42z + 29u = 1790$$

olur. Yine bu muâdeleyi şöylece yazalım:

$$13y + 42z = 1790 - 29u$$

olur. Burada sol taraftaki meçhullerin emsalleri mütebâyin olduğundan sağ taraftaki u gayr-i muayyenine istediğimiz kıymeti verebiliriz:

$$u = 10$$

farz edelim. Yerine koyalım:

$$13y + 42z = 1790 - 290 = 1500 \quad (4)$$

olur. İşte muâdele iki meçhullü bir tek muâdeleye ircâ edildi. Bundan sonra, artık biz keyfe-me'ttefak adedleri meçhullere veremeyiz; teşkil edeceğimiz müteâdil bu iki gayr-i muayyen için icap eden kıymetleri bulmaya vasıtadır. Bu müteâdil de şudur:

$$13y \equiv 1500 \quad (muaddil\ 42)$$

Burada 1500 adedini 42 muaddilinin mâ-dûnuna indirmek için bundan 42'nin mümkün olabilen misillerini çıkaralım.

$$13y \equiv 30 \ \ (muaddil\ 42) \qquad \ldots (5)$$

42 muaddilinin üç mislini 30'a zam edelim:

$$13 \equiv 30 + 126 \equiv 156 \ \ (muaddil\ 42)$$

olup 13 ile tarafeynini taksîm edelim:[7]

$$y = 12$$

olmuş olur.

y'nin bu müsâvîsini 4 muâdelesinde mahalline koyalım:

$$13.12 + 42z = 1500$$

olup bundan:

$$42z = 1500 - 156 = 1344$$

olup bundan da:

$$z = \frac{1344}{42} = 32$$

---

[7] Yukarda 30 adedine 42 muaddilinin 3 mislini zam edersek, mecmûun (13) ile kâbil-i taksîm olduğunu nasıl bildik? Bakınız nasıl: (5) müteâdilinden şöylece bir fikir ile diğer bir müteâdil kurduk: "30 adedine 42 muaddilinin kaç misli zam olunsa 13 ile kâbil-i taksîmdir?" Bu fikirden:

$$30 + 42m \equiv 0 \ \ (muaddil\ 13)$$

müteâdilini kurduk ki, bundan:

$$42m \equiv -30 \equiv 9 \ \ (muaddil\ 13)$$

Yahut:

$$14m = 3$$

Veya:

$$14m = 42$$

Bundan da

$$m \equiv 3 \ \ (muaddil\ 13)$$

bulmuş olduk.

olur. Şimdi sırasıyla bulduğumuz gayr-i muayyenlerin kıymetlerini yazalım:

$$x = 20$$

$$y = 12$$

$$z = 32$$

$$u = 10$$

İşte 1800 kuruşla 20 serçe, 12 tavuk, 32 hindi, 10 tane de ördek alınırmış. Asıl muâdelede bu gayr-i muayyenlerin kıymetleri mahallerine konmuş olsa muâdeleye tevafuk eder kıymetler oldukları tahakkuk etmiş olur.

İhtar: Bu mesele gayr-i muayyendir; binaenaleyh, haller, meçhuller için bulageldiğimiz kıymetlere münhasır değildir. Mesela, bidayette $x = 2h$ müsâvâtını bulmuş ve h kemmiyyetine 10 adedi kıymet olarak verilmiş idi. Bu kıymet verilmeyip de diğer bir aded-i tâm verilmiş olsa, buna göre gayr-i muayyenler de şimdiki aldıkları kıymetten başka kıymetler almış olacaklar. İşte h adedinin her kıymeti değiştikçe diğer gayr-i muayyenlerin de buna göre başka kıymetler alacakları bedihidir.

Mesele 2: 3 avcı pazara aynı cinsten av eti götürürler. Farz edelim ki hepsi bıldırcın götürmüş ve satmışlar. Birinci avcı 10 tane, ikincisi de 25 tane, üçüncü avcı da 30 tane bıldırcın götürmüş ve satmışlar. Esnâ-yı avdette yekdiğerinden satış hakkında izahat isterler. Neticede şu tahakkuk eder ki, bunların hepsi bıldırcınların beherini aynı fiyata satmışlar ve her üçü aynı miktarda meblağ almış. Acaba bu satış nasıl vukua geldi? Bu mesele nasıl tefsir ve hallolunur?

Bu meseleyi halle başlamazdan evvel, ufacık bir ihtarda bulunmak mecburiyetini hissediyorum:

Bence her mes’ele-i riyâziyye gayet açık, pürüzsüz ibarât ile ifade olunmalıdır ki, o meseleyi muhasip istediği gibi muhakeme ederek halledebilsin. Şimdi yazageldiğimiz mesele pek eskidir:

Sanırım ki bundan takriben 125 sene kadar evvel riyâziyyûndan “Ozanam” bu meseleyi hall için (Ulûm-u Riyaziye ve Tabiiye Eğlenceleri) nam kitabına derç eylemiş idi.

Eski zamanlarda âlimler, yekdiğerini tartmak için böyle ibareleri pürüzlü, meşkûk ifadelerle meseleler tertip ederlermiş. Şimdi ulûm-ı riyâziyye o kadar ilerledi ki, böyle lüzumsuz, bî-mânâ şeylere hacet kalmadı. Bunun için halli matlûb meseleler gayet açık, meşkûkiyetten ari ifadelerle yazılmalıdır.

Gelelim şimdi bu meselenin tefsirine ve halline:

Meselenin halli mümkün olmak için avcılar, en aşağıdan iki muhtelif fiyatla iki muhtelif satış icra etmelidir; çünkü en az bıldırcına malik olan avcı kendi bıldırcınlarını iki muhtelif kısma tefrik edip de en az olanı en aşağı fiyatla ve en çok olanı da en yüksek fiyatla satarsa böylelikle meselenin halli mümkün olabilir; yani böylelikle üç avcı da aynı miktarda meblağ almış olabilirler.

Meseleyi basit bir surette halletmek ve birçok gayr-i muayyene meydan vermemek için iki muhtelif satış farz edeceğiz ve satışların a’dâd-ı tâmme ile yani kuruş olarak vukua geldiğini tasavvur eyleyeceğiz.

Bu suretle x, y, z kemmiyyetleri sırasıyla her avcının kendi malik olduğu bıldırcınlardan ayırıp ilk beher bıldırcını t kuruşa sattığı miktarları göstersin. Bundan sonra beher avcıda sırasıyla kalan bıldırcınların adedi:

$$10 - x, 25 - y, 30 - z$$

olup bunların beherini de t' kuruşa sattıkları farz olunsun. Bermûcib-i mes'ele şu münasebât tahaddüs eder:

$$tx + t'(10 - x) = ty + t'(25 - y) = tz + t'(30 - z)$$

Bu münasebâttan şu üç muâdele istihsal olunur:

$$\left.\begin{aligned} x - y &= \frac{15\,t'}{t - t'} \\ x - z &= \frac{20\,t'}{t - t'} \\ y - z &= \frac{5\,t'}{t - t'} \end{aligned}\right\} \quad \dots (1)$$

Bu muâdelelerde x ve y ve z kemmiyyetlerinin aded-i tâm olmaların için $(t - t')$ tefâzulünün $15, 20, 5$ adedlerini ve binaenaleyh bu adedlerin kâsım-ı müşterek-i a'zamları olan 5 adedini tamamen taksîm etmesi lazım gelir. Bu takdirce bizzarure:

$$t - t' = 5$$

olmak iktiza eder. Bu münasebetten şu kıymetler istihraç edilir:

$$t = 6, 7, 8, 9, 10, \dots$$

$$t' = 1, 2, 3, 4,5, \dots$$

Bu kıymetlerden birini ve mesela:

$$t = 6, \qquad t' = 1$$

kıymetlerini alalım, ve bunları 1 ile irâe olunan münasebetlerden son iki münasebette yerlerine koyalım:

$$x - z = 4$$

$$y - z = 1$$

iki gayr-i muayyen muâdeleler husûle gelir. Burada z kemmiyyetine keyfe-me'ttefak a'dâd-ı tâmme verilerek bunlara mukabil x ve y kemmiyyetlerinin kıymetleri bulunur. Şöyle olur:

$$; \; y = 1, \quad x = 4 \;\; olduğuna \; göre \; z = 0$$

$$; \; y = 2, \quad x = 5 \; olduğuna \; göre \;\; z = 1$$

$$\dots ilh \qquad\qquad\qquad\qquad \dots ilh$$

Pek kolaylıkla görülür ki, $z > 6$ olamaz. Hatta $z = 6$ bile olamaz; çünkü bu hâlde $x = 10$ olur ki, birinci avcının kendi bıldırcınlarını hiç ikiye ayırmadan, olduğu gibi satması icap eder ki bu mümkün değildir. $t' = 3, t = 8$ de olamaz. Zîra bu hâlde $x > 10$ olur. Bunun böyle olduğu da 1 muâdelelerinin ikinci muâdelesinde müsâvîler mahalline konsa:

$$x - z = 12$$

muâdelesi hâsıl olur ki burada $z = 0$ bile olsa $x = 12$ olup bu ise muhaldir. Hâsılı şu aşağıdaki ancak on hâl, meseleye tevafuk eder:

$$t = 6 \quad z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

$$t' = 1 \quad x = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$$

$$y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

$$t = 7 \quad z = 0, 1, 2.$$

$$t' = 2 \quad z = 8, 9, 10.$$

$$y = 2, 3, 4.$$

***

71. Hesâb-ı a'lâ, ulûm-ı riyâziyyenin pek çok şuabâtına fevâid-bahş bir surette hizmet eder. Bakınız, bu hususa dair hesâb-ı a’lânın mucidi denmeye şayan olan Alman meşâhir-i riyâziyyûnundan (Gauss) ne diyor:

“Bu kitabımızın pek çok muhtelif yerlerinde hesâb-ı a’lânın (Arithmetique Transcendante) ulûm-ı riyâziyyenin şuabât-ı sâiresine ne kadar faideli hizmet ettiğini bi’l-münâsebe zikir ve beyan etmiş idik. Bu fasılda da evvel-emirde küsûrâtın daha basit kesirlere tefrikinden… bahsedeceğiz.”

(Gauss) burada birçok mebahisten bahsediyor ki, biz bunları sırası geldikçe ileride zikredeceğiz. Yalnız burada sıra, bir kesrin daha basit kesirlere tefrikine geldiği için (Gauss)’un sözünü burada kesip bıraktık.

72. Mesela $\frac{m}{n}$ kesrinin mahreci $a, b, c, \dots\ ilh.$ madrûbat-ı asliyyesini hâvî olsun. Bu kesri mahrecleri a’dan, b’den, c’den, … ibaret olmak üzere tefrik için suretleri $x, y, z, \dots$ gayr-i muayyen kemmiyyetlerden, mahrecleri de $a, b, c, \dots$ adedlerinden ibaret olmak üzere birtakım kesirler mecmûunu asıl $\frac{m}{n}$ kesrine müsâvî kılarız. Bunları mahreclerinden tecrit ettikten sonra, emsalleri a‘dâd-ı tâmmeden ibaret müteaddit meçhullerden terekküp etmiş bir tek muâdele hâsıl olur. Bu muâdeleyi bundan evvel beyan ve tarif ettiğimiz tarz ve usulde hallederiz, maksada vasıl oluruz. Gerçi bunu (Gauss) ikişer ikişer kesirlere tefrik ile halletmiş ise de biz buna lüzum görmeyiz. Meçhulât-ı müteaddideyi hâvî tek bir muâdele teşkil ederek yukarda tarif ettiğimiz usul ve kavâide tatbiken bu muâdeleyi hallederiz. Bakınız, her iki halli de burada vereceğiz. Lakin bu hâlden evvel (Gauss)’un bu bâbda verdiği bazı izahatı beyana mecburuz. Şöyleki, $\frac{m}{n}$ kesri şu yolda:

$$\frac{m}{n} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \cdots$$

küsûrât-ı basîteye tefrik olunur.

Zahirdir ki α, β, γ ... suretlerini müsbet ve kendi mahreclerinden asgar almak mümkündür. Yalnız son kesir keyfe-me'ttefak alınamaz; o, nihayetteki müteâdilin vereceği kıymete tâbidir. Bu hâlde, son kesri $p + \frac{h}{q}$ şekline ifrağ etmek mûcib-i fâidedir. Burada h sureti müsbet ve q'dan asgar olur, p de bir aded-i tâmdır.

(Gauss) misal olmak üzere $\frac{391}{924}$ kesrini ele alarak, bunu şu vechile küsûrât-ı basîteye tefrik ediyor:

$$924 = 4.3.7.11$$

Evvel-emirde bu kesri:

$$\frac{1}{4} + \frac{40}{231}$$

diye ayırıyor; sonra $\frac{40}{231}$ kesrini de

$$\frac{2}{3} - \frac{38}{77}$$

ve $-\frac{38}{77}$'yi

$$\frac{1}{7} - \frac{7}{11}$$

kesirlerine tefrik ettikten sonra $-\frac{7}{11}$ kesri yerine $\frac{4}{11} - 1$ ifadesini koyarak tefrîkâta nihayet veriyor:

$$\frac{391}{924} = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{4}{11} - 1$$

Burada artık ikişer ikişer tefrik usulünü beyana hacet yoktur; iki meçhullü tek bir muâdelenin nasıl halledildiğini şimdiye kadar defaatle yapıp öğrendik. Şimdi asıl bizim usulü burada mechûlât-ı kesîreyi hâvî tek bir muâdelenin sûret-i halline tatbik olmak üzere yapacağız. İşte şöyle:

$$\frac{391}{924} = \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} + \frac{u}{11}$$

muâdelesi teşkil olunur:

Bu muâdeleyi mahreclerden kurtaralım:

$$231x + 308y + 132z + 84u = 391$$

olup bu muâdele şu hey'ete konabilir:

$$308y + 132z + 84u = 391 - 231x$$

Burada muâdelenin sağ tarafındaki meçhullerin emsalleri 4 kâsım-ı müşterekine malik olduklarından $391 - 231x$ ifadesinin de 4 ile kâbil-i taksîm olması muktezîdir.

Bu hâlde:

$$231x \equiv 391 \quad (muaddil\ 4)$$

müteâdili teşkil olunur. 4 muaddilinin münasip misilleri her iki taraftan çıkarıldıkta:

$$3x \equiv 3 \quad (muaddil\ 4)$$

olup bundan:

$$x \equiv 1 \quad (muaddil\ 4)$$

bulunur.

x'in müsâvîsini mahalline koyalım:

$$308y + 132z + 84u = 391 - 231 = 160$$

olur. Bu muâdelenin her bir haddini 4 ile taksîm edelim:

$$77y + 33z + 21u = 40$$

olur. Bundan:

$$77y + 33z = 40 - 21u$$

olup bundan:

$$21u \equiv 40 \quad (muaddil\ 11)$$

Yahut:

$$-u \equiv -4 \quad (muaddil\ 11)$$

olur ve nihayet:

$$u \equiv 4 \quad (muaadil\ 11)$$

bulunur. Mahalline koyalım:

$$77y + 33z = 40 - 4.21 = -44$$

olur. Tarafeyn muâdele 11 ile taksîm edilse:

$$7y + 3z = -4$$

olup bundan da:

$$3z \equiv -4 \quad (muaddil\ 7)$$

Yahut:

$$z \equiv 1 \quad (muaddil\ 7)$$

olur. Mahalline koyalım:

$$7y + 3 = -4$$

olur. Nihayet:

$$y = -1$$

olmuş olur. Şimdi meçhullerin bulduğumuz kıymetlerini sırasıyla yazalım:

$$x = 1, \qquad y = -1, \qquad z = 1, \qquad u = 4$$

Bunları asıl muâdelede yerlerine koyalım:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{4}{11}$$

olur.

Burada $-\frac{1}{3}$ kesrini en sona alıp (Gauss)'un dediği gibi onu $\frac{i}{q} + p$ şekline ifrağ edelim; şöyle olur:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{4}{11} + \frac{2}{3} - 1$$

olup maksat elde edilmiş olur. Bu da:

$$\frac{391}{924} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{4}{11} + \frac{2}{3} - 1$$

dir. Şimdi bizim bulduğumuz küsûrât-ı basîte ile (Gauss)'un bulduklarını yan yana yazalım:

(Gauss)'unki:

$$\frac{391}{924} = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{4}{11} - 1$$

Bizimki:

$$\frac{391}{924} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{4}{11} + \frac{2}{3} - 1$$

Görülüyor ki bunların farkları yoktur.

Müş'ir – İndicateur Yahut $\varphi(n)$ Tâbi-i Adedîsi / (Fermat), (Euler) Da'vâ-yı Nazariyyeleri

73. Bu maddelere başlamadan evvel, şurasını bildirmeğe lüzum görürüz ki Fermat ve bunun ta'mîm edilmişi olan Euler da'va-yı nazariyyeleri Garbın pek çok âdî hesâb kitaplarında ispatlarıyla beraber yazılmış, gösterilmiş ise de Fermat da'vâ-yı nazarîsinin ne gibi yerlerde kullanıldığından ve derece-i lüzûm ve ehemmiyetinden asla bahsedilmemiş ve buna dair de hiçbir tatbikat yapılmamıştır. Hâlbuki Fermat Da'vâ-yı Nazarîsi ve bunun ta'mîm edilmişi olan Euler Da'vası hesâb-ı a'lânın o derece mühim, o mertebe fevâid-bahş bir rükn-i a'zamıdır ki hendesede Pisagor Kaziyyesi ne rol icra ediyorsa Fermat Da'vası da aynı derecede hâiz-i ehemmiyettir.

Hendesede Pisagor da'vasının ehemmiyetini, lüzumunu hendese okuyan her şâkird bilir. Bundan sonra hesâb-ı a'lânın yazacağımız mebâhisinden de Fermat, Euler da'valarına derece-i lüzûm ve ehemmiyeti anlaşılacak ve pek çok tatbikat da yapılacaktır.

İşte Fermat da'vasının ta'mîm edilmişi Euler da'vası olduğundan ve bu da'va için de müş'irin yani $\varphi(n)$ tâbi-i adedîsinin bilinmesine lüzum görüldüğünden, biz de evvel-emirde bu tâbi-i adedîyi bi'l-isbât istihrâc edecek ve bunun havâss-ı meşhûresini beyan eyleyeceğiz.

Tarif: Herhangi bir n aded-i tâmmını olursa olsun, geçmemek ve bu aded-i tâmla mütebâyin olmak üzere kaç tane adedin bulunduğunu gösteren tâbia müş'ir derler ve onu da şu $\varphi(n)$ rumuzu ile gösterirler. Mesela 10 adedini geçmemek ve bununla mütebâyin olmak üzere 4 tane aded vardır ki onlar da $1, 3, 7, 9$ adedleridir. İşte bu 4 aded göstermek için şöylece yazarlar:

$$\varphi(10) = 4$$

Bu tâbiin bi'l-isbât istihrâcı için müteaddit ve muhtelif usuller var ise de, biz burada Legendre'ın usulünü tashih ve ta'dil ederek beyan eden (Tartanvil)in ifadesini tercih eyledik:

74. Da'vâ-yı Nazarî: pm hâsılı, aslî bir p adedinin herhangi mislini ve m de keyfe-me'ttafak bir aded-i tâmmı irâe eylese, p ile mütebâyin olmak ve pm'yi geçmemek üzere:

$$m(p-1)$$

kadar aded vardır.

Zîrâ bir aded, p aded-i aslîsi ile mütebâyin olmak için, bu aded p adedinin hiçbir misli olmamak lazım ve kâfidir. Bunun için, eğer 1'den bed' ile pm hâsılına kadar şu:

$$1, 2, 3, \ldots, pm$$

silsile-i a'dâd-ı tabîiyyesi yazılmış ve bu silsilede p adedinin bi'l-cümle misilleri çıkarılmış olsa, kalacak olan adedlerin pm hâsılını geçmemek üzere p ile mütebâyin adedlerden ibaret olacağı bedihidir.

İmdi, yukarıki silsilede p adedinin misilleri:

$$p, 2p, 3p, \ldots\ mp$$

dir. Bunların adedi m kadardır. Öyle ise bu m kadar aded mp'den tayy edilse:

$$pm - m = m\,(p-1)$$

kadar aded kalır ki bu kadar aded, pm'yi geçmemek ve p ile mütebâyin olmak üzere elde edilmesi iktiza eden adedlerdir.

Tembih: pm hâsılını geçmemek ve p ile mütebâyin olmak için, kaç tane adedin mevcut olduğunu elde etmek için pm hâsılında p yerine $p-1$ koymak kâfidir.

75. Da'vâ-yı Nazarî: $p.b.m$ hâsılı b,p aded-i aslîlerinin hâsıl-ı darbından ibaret olan pb hâsılının herhangi bir misli olup (burada m keyfe-me'ttafak bir adeddir) b,p aded-i aslîleriyle mütebâyin olmak ve $b.p.m$ hâsılını geçmemek üzere:

$$m(p-1)(b-1)$$

kadar aded vardır. Zîrâ bir adedin p,b aded-i aslîleriyle mütebâyin olması için, bu aded p,b adedlerinden hiç birinin misli olmamak elzem ve kâfidir. Binaenaleyh, eğer 1'den bed' ile $p.b.m$ hâsılına kadar şu:

$$1,2,3,\ldots\ pbm$$

silsile-i a'dâd-ı tabîiyyesi yazılıp da bu silsilenin içinden p'nin de b'nin de bi'l-cümle misilleri çıkarılıp atılmış olsa, kalan adedler pb ile mütebâyin olan adedlerdir. Böylece yapalım: Evvel-emirde p'nin misillerini çizelim. Bu hâlde yeni bir silsile elde ederiz ki bunun haddlerinin kâffesi bpm'den asgar ve p ile mütebâyindir. Yani b,m adedlerinden beheri birer aded-i tâm olduklarından, bunların bm hâsıl-ı darbı da bir aded-i tâmdır. Bu hâlde $bm=q$ farz edebiliriz ki bu bâbda pbm hâsılını pq ile gösterebiliriz.

Şimdi da'vamız evvelki da'vanın aynına intikal etti. Yani pq hâsılı, p aded-i aslîsinin herhangi bir misli olup p ile mütebâyin olmak ve pq hâsılını geçmemek üzere $q(p-1)$ kadar aded vardır.

Lakin $q=bm$ olduğundan, q'nun müsâvîsi yukardaki ifadede mahalline vaz' olundukta:

$$bm(p-1)$$

bulunur.

İmdi, birinci silsile yani

$$1, 2, 3, \dots\ pbm$$

silsilesi b adedinin:

$$b, 2b, 3b, \dots\ pmb$$

misillerini hâvî idi. İkinci silsile yani p'nin misilleri çıkarıldıktan sonra, husûle gelen silsilede ise yalnız p ile mütebâyin adedler ile b darb edilerek istihsal edilmiş b'nin misilleri vardır. Lakin b adedi müteakiben:

$$1, 2, 3, \dots\ pm$$

adedleri ile darb edildiğinden, bu hâlde ikinci silsilede pm'yi geçmemek ve p ile mütebâyin olmak üzere b'nin misillerini çizmek kaldı. Bu haddlerin adedi ise $m(p-1)$ kadardır. El-hâsıl bu ameliyeden sonra kalan haddlerin adedi:

$$bm(p-1) - m(p-1)$$

Yahut:

$$m(p-1)(b-1)$$

kadar olup matlûb sabit olur.

Tembih: pbm hâsılında m herhangi bir aded olursa olsun b, p adedleri de aslî bulunsun, bpm hâsılını geçmemek ve b, p ile mütebâyin olmak üzere kaç tane adedin mevcut olduğunu bilmek için pbm hâsılında b, p madrûbları yerine mütenâzıran $(b-1)(p-1)$ adedlerini koymak kâfidir.

76. Da'vâ-yı Nazarî: m ne olursa olsun, p, a, b adedleri aslî olarak $pabm$ hâsılını geçmemek ve p, a, b adedleriyle mütebâyin olmak üzere:

$$m(p-1)(a-1)(b-1)$$

kadar aded vardır. Zîrâ bir adedin p, a, b aded-i aslîleriyle mütebâyin olması için bu aded, p, a, b adedlerinin misilleri olmamak elzem ve kâfidir. Binaenaleyh:

$$1, 2, 3, 4, \dots\ pabm$$

silsile-i a'dâd-ı tabîiyyesinde eğer p'nin, a'nın, b'nin bi'l-cümle mislller çizilip tayy edilse $pabm$ hâsılını geçmeyen ve p, a, b ile mütebâyin olan adedler kalır. Böyle yapalım:

Evvel-emirde, p ile a aded-i aslîlerinin bi'l-cümle mislllerini hazf edelim. Bu hâlde $pabm$ hâsılını geçmeyen ve p, a ile mütebâyin olan adedler kalır ki bunların adedi de:

$$bm(p-1)(a-1)$$

dir. Bakınız bu ne demektir? Biraz daha izahat verelim:

bm hâsılı bir aded-i tâmdır. Bunu $bm = q$ müsâvâtıyla gösterelim. Bu hâlde $pabm$ hâsılı paq şeklini alır. Bundan evvelki da'va mûcibince p, a ile mütebâyin olmak ve paq hâsılını geçmemek üzere kaç aded vardır? Bunların adedi bundan evvelki da'vada ispat ve beyan edildiği vechile:

$$q(p-1)(a-1)$$

kadar idi. Şimdi, burada q'nun müsâvîsi mahalline vaz' olundukta:

$$bm(p-1)(a-1)$$

şekli husûle gelir:

Şimdi, yeni silsilenin hâvî olduğu b'nin misillerini çizmek kaldı. İmdi, birinci silsile b'nin:

$$b, 2b, 3b, \dots, pabm$$

misillerini hâvî idi. İkinci silsile ise, yalnız p ve a ile mütebâyin olan b'nin misillerini hâvîdir. Yani bu b'nin misilleri p ile a mütebâyin bir adedin b'ye hâsıl-ı darbından müteşekkildir.

Lakin b adedi müteakiben:

$$1, 2, 3, \dots, pam$$

ile darb edildiğinden, bu hâlde ikinci silsilede çizilmesi icap eden adedler p, a ile mütebâyin olan ve pam hâsılını geçmeyenlerdir. Bunların adedi ise:

$$m(p-1)\,(a-1)$$

kadardır. Hâsılı bu ameliyeden sonra, kalan adedlerin adedi, yani $pabm$ hâsılını geçmeyen ve p, a, b ile mütebâyin olan adedlerin adedi:

$$bm(p-1)(a-1) - m(p-1)(a-1)$$

Yahut:

$$m(p-1)(a-1)(b-1)$$

kadar olup da'vamız da sübut bulur.

Tembih: m adedi ne olursa olsun b, a, p adedleri aslî olmak şartıyla $p \times a \times b \times m$ hâsılını geçmemek ve p, a, b ile mütebâyin olmak üzere kaç tane adedin mevcut olduğunu bilmek için $pabm$ hâsılında b, a, p aded-i aslîleri yerine mütenâzıran $(b-1), (p-1)$ ve $(a-1)$ adedlerini koymak kâfidir.

Tembih: Bedihidir ki yukardan beri yapılagelen muhâkemâtın aynını tekrar ederek aşağıdaki da'vâ-yı nazarî-yi umûmîyi bi'l-isbât ifade ve beyan edebiliriz:

$pabd \ldots fm$ hâsılı $pabd \ldots f$ hâsılının herhangi bir mislini gösterse (burada $p, a, \ldots f$ adedleri aslîdirler) $pabd \ldots fm$ hâsılını geçmemek ve $p, a, b, \ldots f$ adedleriyle mütebâyin olmak üzere:

$$m(p-1)(d-1)\ldots(f-1)$$

kadar aded vardır.

Şunu da ihtar edelim ki bu aded $pabd \ldots fm$ hâsılında $p, a, b, \ldots f$ yerine mütenâzıran

$$(p-1), (a-1), (b-1), (d-1), \ldots (f-1)$$

adedleri konarak istihsal edilir.

Netice: Şimdi herhangi bir n adedi olursa olsun farz edelim. Bu adedi de madrûbât-ı asliyyesine tefrik eyleyelim. O madrûbât-ı asliyye de şu olsun:

$$n = p^{\alpha}.a^{\beta}.b^{\gamma}. \ldots f^{\delta} \quad (1)$$

Kolaylıkla görülür ki bir adedin n ile mütebâyin olması bu n adedinin madrûbât-ı asliyyesi olan:

$$p, a, b, \ldots, f$$

adedleriyle mütebâyin olmasına vabestedir. Bundan istintaç olunur ki n adedini geçmeyen ve bu adedle mütebâyin olan a'dâdın adedi n'den küçük ve $p, a, \ldots, f$ ile mütebâyin olan adedlerin adedi kadardır. Burada (1) münasebetini şöylece de yazabiliriz:

$$n = p.a.b \ldots f\, p^{\alpha-1}\, a^{\beta-1}\, b^{\gamma-1} \ldots f^{\delta-1}$$

Bu münasebette:

$$p^{\alpha-1}\, a^{\beta-1}\, b^{\gamma-1} \ldots f^{\delta-1}$$

hâsılı, bir aded-i tâmdan ibaret olduğu için yukarıki ispat edilen da’vâ-yı nazariyyede m adedi yerine kaim olabilir. Bu hâlde bu da’valar mûcibince:

$$\varphi(n) = m(p-1)(a-1)(b-1)\ldots(f-1)$$

ifadesi yazılabilir. Burada m yerine müsâvîsi vaz‘ olundukta:

$$\varphi(n) = p^{\alpha-1}\, a^{\beta-1}\, b^{\gamma-1}\ \ldots f^{\delta-1}(p-1)(a-1)(b-1)\ldots(f-1)$$

olur.

Tembih: Yukarda $\varphi(n)$ rumuzunu kullandık; bunun manası şudur:

“n adedini geçmemek ve bu adedle mütebâyin olmak üzere kaç tane aded vardır?” Lakin bu ifade uzundur. İşte muhtasaran beyan etmek için $\varphi(n)$ rumuzunu kullandık ve kullanacağız ki bunu evvelce Euler $\varphi(n)$ rumuzuyla göstermiş ve hâlâ da akvâm-ı garbiyye bunu böylece kabul edip kullanmakta bulunmuşlardır.

Bu hâlde:

$$\varphi(n) = p^{\alpha-1}\, a^{\beta-1}\, b^{\gamma-1}\ \ldots f^{\delta-1}(p-1)(a-1)(b-1)\ldots(f-1)$$

münasebeti n adedini geçmemek ve bununla mütebâyin olmak üzere kaç adedin mevcut olduğunu bildirir ve hesâb eder.

Tembih: Eğer n adedi aslî ise bu hâlde:

$$\varphi(n) = n^0(n-1) = n-1$$

olur. [$n^0 = 1$’dir. Bunu cebir okuyanlar ispatıyla beraber bilirler.]

Zaten bu neticeyi anlamak pek kolaydır. Çünkü bir aded-i aslî kendinin tamamen taksîm etmediği a‘dâdın kâffesiyle mütebâyindir. Hâlbuki kendinden küçük olan adedleri, bir aded-i aslî tamamen taksîm edemediğinden cümlesiyle mütebâyindir. Bu hâlde n aded-i aslîsi ile mütebâyin olmak ve bu adedi geçmemek üzere a‘dâdın adedi:

$$n-1$$

dir.

Tatbikat

1^0: $n = 13$ olsun. Bu hâlde

$$\varphi(n) = 13-1 = 12$$

olur.

2^0: $n = 2^4 = 16$ olsun; bu hâlde:

$$\varphi(n) = 2^{4-1}(2-1) = 2^3 = 8$$

olur.

3^0: $n = 360$ olsun. Yani: $360 = 2^3.3^2.5$ olsun.

Bu takdirce:

$$\varphi(n) = 2^2.3(2-1)(3-1)(5-1) = 96$$

olur.

$\boldsymbol{\varphi(n)}$ Tâbi'-i Adedîsinin Havâss-ı Meşhûresi

77. Da'vâ-yı Nazarî: $\varphi(n)$ tâbi-i adedîsi yalnız 1 veya 2'ye müsâvî olmadıkça daima çifttir. Eğer $n = 1$ olursa $\varphi(1) = 1$ olur. Ve eğer $n = 2$ olursa yine $\varphi(2) = 1$ olur. Şimdi $n > 2$ olduğunu farz edelim. Bu bâbda iki hâl karşısında bulunuruz.

1^0. n adedi 2'nin kuvvetine müsâvîdir; yani:

$$n = 2^{\alpha-1} \quad \alpha > 2$$

olduğuna göre:

$$\varphi(n) = 2^{\alpha-1}(2-1) = 2^{\alpha-1}$$

olur. Burada α adedi vâhidden a‘zam olduğundan 2 adedi çifttir.

2^0. n adedi yalnız ikinin bir kuvveti değildir. Öyle ise:

$$n = p^{\alpha} a^{\beta} b^{\lambda} \ \dots \ f^{\delta}$$

şeklinde bir adeddir. Burada:

$$p, a, b, \dots, f$$

aded-i aslîlerinden hiç olmazsa biri olsun 2'nin gayridir; bu hâlde tek bir adeddir. Bu takdirde:

$$(p-1)(a-1)(b-1) \ \dots (f-1)$$

adedlerinden hiç olmazsa biri çifttir. Bu sebepten $\varphi(n)$ tâbii çifttir. Hülâsa edelim. Eğer n adedi yalnız 1'e veya yalnız 2'ye müsâvî ise bu hâlde $\varphi(n)$ adedi tektir. Yok, eğer bunların gayri bir aded ise $\varphi(n)$ tâbii herhâlde çifttir.

78. Da'vâ-yı Nazarî: Eğer n ve n' gibi iki aded-i tâm, mütebâyin olsalar:

$$\varphi(n.n') = \varphi(n).\varphi(n')$$

münasebeti tahaddüs eder. Zîrâ:

Mademki n ile n' mütebâyindirler, bunların madrûbât-ı asliyyeleri muhteliftir. Yani n adedinin hiçbir madrûbu n' adedinin hiçbir madrûbuna müsâvî değildir. Bu hâlde:

$$n = a^{\alpha} b^{\beta} \dots f^{\lambda} \ \dots (1)$$

$$n' = a'^{\alpha'} b'^{\beta'} \; ... \; f'^{\lambda'} \; ... \; (2)$$

Lakin faraziyemizde

$$a, b, ... f, a', b', ... f'$$

a‘dâd-ı asliyyesi yekdiğerine karşı muhteliftir, bu hâlde şu münasebet husûle gelir:

$$nn' \; = \; a^{\alpha} b^{\beta} \; ... \; f^{\lambda} \, a'^{\alpha'} b'^{\beta'} \; ... \; f'^{\lambda'} \quad ... (3)$$

İmdi (1)'den:

$$\varphi(n) = \; a^{\alpha-1} \, b^{\beta-1} \; ... \; f^{\lambda-1} \, (a-1)(b-1) \; ... (f-1)$$

Ve (2)'den:

$$\varphi(n') \; = \; a'^{\alpha'-1} \, b'^{\beta'-1} \, ... \, f'^{\lambda'-1} \, (a'-1) \, (b'-1) \, ... (f'-1)$$

(3)'ten de:

$$\varphi\,(n.n') = \begin{cases} \quad a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \; ... \; f^{\lambda-1} \, a'^{\alpha'-1} \, b'^{\beta'-1} \, ... \, f'^{\lambda'-1} \\ (a-1)(b-1) \, ... \, (f-1)(a'-1)(b'-1) \, ... \, (f'-1) \end{cases}$$

olup bu en nihayet ki münasebat şöyle de yazılır:

$$(nn') = \begin{cases} \quad a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \; ... \; f^{\lambda-1}(a-1)(b-1) \, ... (f-1) \\ \times \, a'^{\alpha'-1} \, b'^{\beta'-1} \, ... \, f'^{\lambda'-1}(a'-1) \, (b'-1) \, ... (f'-1) \end{cases}$$

Bu son münasebattan şu müsâvât pek güzel görünür ve anlaşılır:

$$\varphi(n.n') \; = \; \varphi(n).\varphi(n')$$

Burada da'vamız da sabit olur.

79. Da'vâ-yı Nazarî: $p, a, b, ... f$ adedleri ikişer ikişer mütebâyin olsalar da bunların hâsıl-ı darbı da m olsa:

$m = \; p.a.b \, ... f$ müsâvâtından

$$\varphi(m) = \varphi(pab \ldots f) = \varphi(p).\varphi(a).\varphi(b) \ldots \varphi(f)$$

münasebeti husûle gelir. Zîrâ mademki $p, a, b, \ldots, f$ adedleri ikişer ikişer mütebâyindirler; bu hâlde yukarıki da'vâ-yı nazarîler mûcibince şu aşağıdaki münasebetler sahihtir:

$$\varphi(m) = \varphi(p).\varphi(a.b.\ldots f)$$

$$= \varphi(p).\varphi(a).\varphi(b \ \ldots f)$$

$$= \varphi(p).\varphi(a).\varphi(b).\varphi(\ldots f)$$

$$= \varphi(p).\varphi(a).\varphi(b).\ldots \varphi(f)$$

olup işte umumî olan şu daa'vâ-yı nazarî de böylece sübut bulmuş olur.

80. Da'vâ-yı Nazarî: Eğer n adedi basitçe tek bir aded olursa, yani: $n = 2n'$ (burada n' adedi tek bir adeddir) şeklinde bulunsa:

$$\varphi(n) = \varphi(n')$$

münasebeti hâsıl olur. Zîrâ:

$$\varphi(n) = \varphi(2).\varphi(n')$$

olup $\varphi(2) = 1$ olduğundan mahalline konsa:

$$\varphi(n) = 1.\varphi(n') = \varphi(n')$$

olup da'va sübut bulur.

Mesela:

$$\varphi(10) = \varphi(5) = 4$$

tür. Kezalik:

$$\varphi(14) = \varphi(7) = 6$$

dır.

Müş'irin Yani $\varphi(n)$ Tâbi-i Adedîsinin Diğer Havâss-ı Meşhûresi

Tembih: Bundan evvel bi'l-isbât çıkarmış olduğumuz:

$$\varphi(n) = p^{\alpha-1} a^{\beta-1} b^{\gamma-1} \ldots f^{\delta}(p - 1)(a - 1)(b - 1) \ldots (f - 1)$$

ifadesini riyâzi-yi şehîr (Euler) şu vech ile göstermiştir.

$$\varphi(n) = p^{\alpha}\, a^{\beta}\, b^{\gamma}\, \ldots f^{\delta}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{f}\right)$$
$$= n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{a}\right) \ldots (1 - \frac{1}{f})$$

Bunun evvelki ifadeden istihracı pek kolaydır. Bâkîsiz madrûblardan bir tanesi için icrâ-yı amel edelim de diğerleri de buna kıyasen istihraç olunabilir. Mesela:

$$p^{\alpha-1}(p - 1)$$

ifadesini ele alalım. Bu ifade şöylece de yazılabilir:

$$p^{\alpha}\frac{(p - 1)}{p}$$

Bunun ikinci madrûbu olan $p - 1$'i p'ye taksîm etsek:

$$p^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

olur. Diğer madrûblar da tıpkı bunun gibi istihsal edilerek:

$$\varphi(n) = p^{\alpha}\, a^{\beta}\, b^{\gamma}\, \ldots f^{\delta}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{f}\right)$$

olur. Hâlbuki bundan evvel (1) müsâvâtında:

$$n = p^{\alpha}\, a^{\beta}\, b^{\gamma}\, \ldots f^{\delta}$$

farz edilmiş olduğundan yukardaki ifadede mahalline vaz‘ edilse:

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\dots\left(1-\frac{1}{f}\right)$$

olmuş olup (Euler) ifadesi bulunmuş olur.

81. Da’vâ-yı Nazarî: Bir aded-i tâmmın kâsımlarının müş‘irleri mecmûu, o aded-i tâmmın kendine müsâvîdir. Mesela:

$$m = a^{\alpha} b^{\beta} d^{\delta} \dots c^{\lambda}$$

madrûbatına tefrik edilmiş bir (m) adedini gösterse de bunun bi’l-cümle kâsımları da [vâhid ve kendi aded de dâhil olduğu hâlde]

$$1, p, p', p'', \dots, m$$

olsa[8] bu kâsımların müş‘irleri mecmûu adedin kendisine yani (m)’ye müsâvîdir.

$$m = \varphi(1) + \varphi(p) + \varphi(p') + \dots + \varphi(m)$$

Zîrâ m adedinin kâsımlarının mecmûu:

$$(1 + a + a^2 + \dots + a^{\alpha})(1 + b + b^2 + \dots + b^{\beta})(1 + d + d^2 + \dots + d^{\gamma}) \dots (1 + c + c^2 + \dots + c^{\delta})$$

hâsılından ibarettir. Bunların yerine müş‘irleri irâe eden rumuz konulsa:

$$[\varphi(1) + \varphi(a) + \varphi(a^2) + \dots + \varphi(a^{\alpha})][\varphi(1) + \varphi(b) + \varphi(b^2) + \dots + \varphi(b^{\beta})] \dots [\varphi(1) + \varphi(c) + \varphi(c^2) + \dots + \varphi(c^{\delta})] \quad \dots (2)$$

[8] Bir adedin bi’l-cümle kâsımlarını ve bu kâsımların mecmû’larını ve hâsıl-ı darblarını bulmak hesâb-ı âdînin mebahisi dâhilindedir. Bunlara ait hesâbât ve ifadât âdî hesâb kitaplarında muharrer bulunduğundan biz burada kari’în-i kirâmı bu bahisleri bellemiş addetmeye hakkımız vardır. Binaenaleyh bunlara dair söz söylemeye lüzum görmedik.

olur ki bunların hâsılı m adedinin müş‘irleri mecmûuna müsâvîdir.

Bunlardan birini alarak (Euler) düsturuna tevfîkan tevsî‘ edelim:

$$\begin{aligned}\varphi(1)+\varphi(a)+\varphi(a^2)+\cdots+\varphi(a^\alpha) \\ &= 1+a\left(1-\frac{1}{a}\right)+a^2\left(1-\frac{1}{a}\right)\ldots+a^\alpha\left(1-\frac{1}{a}\right) \\ &= 1+\left(1-\frac{1}{a}\right)[a+a^2+a^3\ldots+a^\alpha]\end{aligned}$$

Burada görülüyor ki büyük mu‘terizenin içindeki silsile bir silsile-i hendesiyyedir. Bu hâlde:

$$\begin{aligned}1+\left(1-\frac{1}{a}\right)\left[\frac{a^{\alpha+1}-a}{a-1}\right] &= 1+\frac{a-1}{a}.\frac{a^{\alpha+1}-a}{a-1}=1+\frac{a^{\alpha+1}-a}{a} \\ &= 1+a^\alpha-1=a^\alpha\end{aligned}$$

olur. Aynı vech ile icrâ-yı amel olunarak:

$$b^\gamma=\varphi(1)+\varphi(b)+\varphi(b^2)+\cdots+\varphi(b^\gamma)$$

$$d^\delta=\varphi(1)+\varphi(d)+\varphi(d^2)+\cdots+\varphi\left(d^\delta\right)$$

bulunur ki bunlar 2 ifadesinde mahallerine konulursa:

$$a^\alpha b^\beta\ldots c^\lambda$$

elde edilir; bu ise m adedine müsâvîdir. Buna dair bir misal yapalım:

$$m=36=2^2.3^2$$

olsun. Bunun kâsımlarını hesâb-ı âdîdeki usule tevfîkan hesâb edecek olursak şunlardan ibaret olduğu tahakkuk eder:

$$1,2,3,4,8,6,9,12,18,36$$

Bunların müş‘irlerini da hesâb edip yazalım:

$$\varphi(1) = 1$$

$$\varphi(2) = 1$$

$$\varphi(3) = 2$$

$$\varphi(4) = 2$$

$$\varphi(6) = 2$$

$$\varphi(9) = 6$$

$$\varphi(12) = 4$$

$$\varphi(18) = 6$$

$$\varphi(36) = 12$$

Bu müsâvâtlar taraf tarafa cem‘ edilseler:

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(6) + \varphi(9) + \varphi(12) + \varphi(18) + \varphi(36) = 36$$

olur.

82. Da’vâ-yı Nazarî: p ile r adedleri mütebâyin olup eğer p’nin misilleri olan

$$p, 2p, 3p, \dots, p(r-1); (1)$$

adedleri r adedi ile taksîm edilseler, bakiyeler – sıralarından sarf-ı nazar – $(r-1)$ ilk silsile-i a‘dâd-ı tabîiyyesinden ibarettir. Daha açık söyleyelim:

Eğer (1) ile gösterilen silsilenin her bir haddi r üzerine taksîm edilse herhangi tarz ve nizamda olursa olsun fakat sıra ile tanzim edildikleri hâlde:

$$1, 2, 3, \dots, (r-1)$$

ilk silsile-i a‘dâd-ı tabîiyyesi husûle gelir. Zîrâ:

1^0. Bu taksîmlerden zuhur edecek bakiyelerden hiçbiri sıfır değildir. Yani (1) silsilesinde hiçbir hadd (r) ile kâbil-i taksîm değildir. Farz edelim ki (1) silsilesinde ph haddi r ile taksîm olunsun da bakiye sıfır olsun. Bu hâlde ph hâsıl-ı r ile kâbil-i taksîm olmak iktiza eder. Lakin da’va başında p ile r mütebâyin olarak alınmıştı. Bu hâlde p’yi r taksîm edemez; h adedini taksîm etmesi lazım gelir. Lakin (1) silsilesinde p’nin en büyük misli $r-1$’dir. Bu hâlde $h<r$’dir. Öyle ise $p.h$ adedi umumiyetle alındığından silsilede hiçbir hadd r ile taksîm olunsa bakiye sıfır olamaz.

2^0. Bütün bakiyeler muhteliftir. Farz edelim ki $h.p, h'.p$ haddleri aynı bakiyeler versin ve bu bakiye de t olsun. Bu hâlde şu aşağıdaki münasebât vücuda gelir:

$$\left.\begin{matrix} h.p \equiv t \\ h'.p \equiv t \end{matrix}\right\} (muaddil\, r)$$

$$\left.\begin{matrix} h \leq r-1 \\ h' \leq r-1 \end{matrix}\right\} h \neq h'$$

Bu iki müteâdil yekdiğerinden tarh edilse:

$$h.p - h'.p \equiv 0 \quad [muaddil\, r]$$

olur. Bundan:

$$(h-h').p \equiv 0 \quad [muaddil\, r]$$

husûle gelir:

Bu son münasebetten anlaşılıyor ki $(h-h').p$ hâsıl-ı darbı r ile kâbil-i taksîmdir. Hâlbuki p adedi r ile kâbil-i taksîm değildir; çünkü onunla mütebâyindir.

$h - h'$ tefâzulü ise $r - 1$'den asgar olduğundan r'den herhâlde daha asgardır. Bu sebepten (1) silsilesinde hiç iki hadd aynı bakiyeyi veremez. Hülâsa edelim:

1 silsilesinde bakiyelerin kâffesi sıfır ile mütebâyindir ve cümlesi de muhteliftir. Hâlbuki bunların kâffesi r'den küçüktür. Adedleri de $r - 1$ kadardır. Öyle ise bunlar – sıraya bakılmayarak – bizzarure $r - 1$ kadar ilk silsile-i a'dâd-ı tabîiyyeden olmak lazım gelir; da'va da sübüt bulur.

Tembih: Yukardaki 1 silsilesinde evvel ve ahirden eb'âd-ı mütesâviyede bulunan iki aded r ile taksîm edilseler, bunlardan kalacak bakiyeler mecmûu r adedine müsâvîdir.

Zîrâ: Eğer tasavvur olunan iki adedden biri hp olsa diğeri bittabi $(r - h)p$ olur. Bunların r üzerine taksîminden kalan bakiyeler mütenâzıran a, a' ile irâe olunsa şu münasebât husûle gelir:

$$h.p \equiv a \quad [muaddil\, r] \quad r > a \geq 0$$

$$(r - h)p \equiv a' \quad [muaddil\, r] \quad r > \delta' \geq 0$$

Bu müteâdiller taraf tarafa cem' edilseler:

$$r.p \equiv a + a' \quad [muaddil\, r]$$

olur. Görülüyor ki burada $(a + a')$ bakiyeleri mecmûu (r)'nin misli olmak lazım gelir.

İmdi bu mecmû' $(2r)$ olamadığı gibi bittabi bundan büyük (r)'nin emsali de olamaz. Zîrâ a, a' adedlerinden her biri (r)'den asgardır. Bu hâlde mecmûları behemehâl r'dir. Bu suretle da'va da sabittir.

83. Da'vâ-yı Nazarî: r, p adedleri mütebâyindir ve fakat r adedi aslî olsun, olmasın keyfe-me'ttefak bir adeddir. Eğer r adedini geçmeyen ve fakat onunla mütebâyin olan

$$1, f, d, h, \dots, (r-1)$$

adedlerini p ile darb ederek husûle gelecek olan silsilenin her bir haddi r ile taksîm edilse bakiyeler – herhangi tarz ve nizamda olursa olsun –

$$1, f, d, h, \dots, (r-1)$$

adedlerinden ibaret olur. Zîrâ yukarıki adedleri p ile darb ederek hâsıl olan:

$$p, fp, dp, hp, \dots, p(r-1) \quad [q]$$

silsilesinde hiçbir hadd r ile taksîminden sıfır bakiye veremez. Farz edelim ki bu silsile içinde bir mp haddi r üzerine taksîm olunsun da bakiye sıfır olsun. Bu hâlde:

$$m.p \equiv 0 \quad [muaddil\ r]$$

olmak lazım gelir.

Yani mp hâsılını (r)'nin tamamen taksîm etmesi icap eder: Bu ise olamaz. Çünkü p ile r mütebâyindir. m ise r'yi geçmeyen ve onunla mütebâyin olan adedlerden biridir. Bu hâlde mp gibi bir hadd r ile kâbil-i taksîm değildir. Yekdiğerine müsâvî bakiyeler de yoktur. Yani bütün bakiyeler muhteliftir. Bu da [Madde 82]nin ikinci şıkkıyla ispat olunabilir. Yalnız (q) silsilesinde herbir hâsıl-ı darbın (r) ile mütebâyin ve binaenaleyh bütün bakiyelerle de mütebâyin olduğunu ispat etmek kaldı. (q) silsilesinden keyfeme'ttefak bir hadd alalım. O da bi'l-farz fp olsun. r, p ile mütebâyindir. f ise r ile mütebâyin ve onu geçmeyen adedlerden biridir. Bu hâlde r hem p ile hem de f ile mütebâyin olduğundan fp hâsılı ile de bizzarure mütebâyin olmak lazım gelir.

Bu hâlde fp hâsılının r üzerine taksîminden kalan bakiye de r ile mütebâyindir. Şimdi q silsilesindeki haddlerin kâffesi muhteliftir.

Hiçbiri de sıfır bakiye veremez. Bi'l-cümle bakiyeler de r ile mütebâyindir. Bunların adedi ise $\varphi(r)$'dir. Öyle ise bu bakiyeler – tarz ve nizama bakılmayarak –

$$1, f, d, h, \dots, (r-1)$$

adedlerinden başka bir şey olamaz; matlûb da sabit olur.

[Fermat] Da'vâ-yı Nazarîsi: p herhangi bir aded olursa olsun, r adedi p adedini taksîm etmeyen aded-i aslî-yi mutlak olursa:

$$p^{r-1} - 1$$

ifadesi r ile kâbil-i taksîmdir. Yani şu:

$$p^{r-1} \equiv 1 \quad [muaddil\ r]$$

müteâdili sahih olur.

Şimdi p adedinin misilleri olan:

$$p, 2p, 3p, \dots, (r-1)p$$

adedlerini r üzerine taksîm edelim. Bu taksîmlerden husûle gelecek bakiyeleri de mütenâzıran:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{r-1}$$

ile gösterelim. Bu takdirce şu aşağıdaki münasebât elde edilmiş olur:

$$\left.\begin{array}{c} p \equiv a_1 \\ 2p \equiv a_2 \\ 3p \equiv a_3 \\ \dots \\ (r-1)p \equiv a_{r-1} \end{array}\right\} [muaddil\ r]$$

Bu münasebât taraf tarafa darb edilse:

$$p.\,2p.\,3p.\,\dots(r-1)p \equiv a_1.\,a_2.\,a_3.\,\dots a_{r-1} \quad [muaddil\ r]$$

Yahut:

$$1.2.3.\ldots(r-1)p^{r-1} \equiv a_1.a_2.a_3.\ldots a_{r-1} \quad [muaddil\ r]$$

olur. Lakin [Madde 82] mûcibince:

$$a_1.a_2.a_3.\ldots a_{r-1} = 1.2.3.\ldots(r-1)$$

olduğundan yukardaki münasebette mahalline konulsa:

$$1.2.3.\ldots(r-1)p^{r-1} \equiv 1.2.3.\ldots(p-1) \quad [muaddil\ r]$$

olur. Lakin:

$$1.2.3.\ldots(r-1)$$

hâsılı r ile kâbil-i taksîm olduğundan yukardaki müteâdili bu hâsıl ile taksîm caizdir. Bu takdirce:

$$p^{r-1} \equiv 1 \quad [muaddil\ r]$$

olup matlûb sabit olur.

Tembih: İspat edegeldiğimiz (Fermat) da’vâ-yı meşhûresi bu zatın kendi âsârında münderiç ise de bu da’vayı en evvel ispat eden (Euler)dir. (Euler) bu da’vayı iki türlü ispat etmiştir. Birisi $(r-1)$ zû-haddinin tevsî‘ine istinad eder ki biz de daha aşağılarda bu ispatı vereceğiz. İkinci ispat ise bu da’vanın ta‘mîm edilmişidir pek büyük ehemmiyetine mebni bunu şimdi yazmayı faideden hâli bulmadık.

84. (Euler) Da’vâ-yı Nazarîsi: r ile p adedleri ne olursa olsun yalnız beynlerinde mütebâyin olmak şartıyla eğer φ(r) tâbii r adedini geçmemek ve onunla mütebâyin olmak üzere kaç tane adedin mevcut olduğunu irâe etse:

$$p^{\varphi(\mathrm{r})} - 1$$

tefâzulü r ile kâbil-i taksîmdir. Yani:

$$p^{\varphi(\mathrm{r})} \equiv 1 \quad [muaddil\ r]$$

müteâdili sahihtir. Zîrâ:

r adedini geçmeyen ve onunla mütebâyin olan adedler bi'l-farz:

$$q, d, h, \dots, f$$

olsun. Bunların adedi tabii $\varphi(\mathrm{r})$ kadardır.

Şimdi p adedinin $\varphi(\mathrm{r})$ kadar misilleri olan:

$$qp, dp, hp, \dots, fp$$

adedleri r üzerine taksîmlerinden zuhur edecek bakiyeleri mütenâzıran:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{\varphi(\mathrm{r})}$$

ile irâe olunsalar, şu müteâdiller vücuda gelir:

$$\left.\begin{array}{c} qp \equiv a_1 \\ dp \equiv a_2 \\ \dots \\ fp \equiv a_{\varphi(\mathrm{r})} \end{array}\right\} [muaddil\ r]$$

Bu müteâdiller taraf taraf darb edilseler:

$$q.d.h.\dots f.p^{\varphi(\mathrm{r})} \equiv a_1.a_2.a_3.\dots\ a_{\varphi(\mathrm{r})} \quad [muaddil\ r]$$

olur. Lakin [Madde 83] mûcibince:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{\varphi(\mathrm{r})}$$

bakiyeleri – tarz ve nizamına bakılmayarak – $q.d.h.\dots f$ adedlerine müsâvî olduğundan:

$$a_1.a_2.a_3.\dots\ a_{\varphi(\mathrm{r})} = q.d.h.\dots f$$

olur. Bu hâlde yukardaki müteâdil de bittabi:

$$a_1.a_2.a_3.\dots a_{\varphi(\mathrm{r})} \equiv q.d.h.\dots f \quad [muaddil\ r]$$

olur ki tarafeyn müteâdil

$$q.d.h.\dots f$$

ile taksîm [Bu adedlerin beheri r ile mütebâyin olduklarından bunların hâsıl-ı darbları da r ile mütebâyin olur. Bu hâlde tarafeyn-i müteâdil bu hâsıl-ı darb ile taksîm olunabilir.] edildikte:

$$p^{\varphi(\mathrm{r})} \equiv 1 \ \ [muaddil\ r]$$

olur, matlûb da sübut bulur.

Tembih: Şimdi burada r adedini aslî-yi mutlak farz edelim. Bu hâlde:

$$\varphi(\mathrm{r}) = r - 1$$

olur. Yukarıki müteâdilde:

$$p^{\mathrm{r}-1} \equiv 1 \ \ [muaddil\ r]$$

olur ki bu da (Fermat) da'vâ-yı nazarîsinden başka bir şey değildir. İşte (Fermat) da'vâ-yı nazarîsi (Euler) da'vasının bir hâl-i husûsîsidir.

85. (Fermat) da'vâ-yı nazarîsinin ikinci ispatı: Da'vanın pek büyük ehemmiyetine mebni Avrupalılar bunu müteaddit ve muhtelif ispatlarla izah etmişlerdir. İşte biz de burada bu da'vanın ikinci bir ispatını daha yazmayı faideli bulduk.

Malumdur ki aded-i tâm olan her m kuvvetine tevsî' edilen $(a + b)$ zû-haddi şu şekildedir:

$$(a+b)^m = a^m + m.a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + \cdots + b^m \quad [k]$$

Bunun mecmû'-ı hudûdunun adedi $(m+1)$'dir. Bu haddlerin her biri – hesâbât-ı lâzime icra edildikten sonra – bir aded-i tâma ircâ olunur. Bunlar içinden keyfe-me'ttefak bir haddi ve mesela (4)üncü haddi alalım:

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 = bir\ aded - i\ tam$$

Yahut basitçe:

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 = N$$

dir. İmdi eğer m üssü aslî bir aded ise bu m adedi mahrecteki madrûbâtın hiçbiri ile kâbil-i taksîm değildir. Böyle olunca bu m adedi N adedinin madrûbâtı arasında ve aslî bir madrûb olarak bulunmuş olur.

Aynı keyfiyetin bi'l-cümle emsaller hakkında da tezahür edeceği bedihi olduğundan bundan istintaç olunur ki (k) tevsî'inin kâffe-i emsalleri mecmûu [ki bunların beherinde m madrûb-u aslîsi vardır] m adedi ile kâbil-i taksîmdir. İşte bu taksîmden zuhur edecek hâric-i kısmeti h ile irâe eylersek şu neticeye dest-res oluruz:

$$(a+b)^m = a^m + b^m + hm \quad [S]$$

Yahut:

$$(a+b)^m \equiv a^m + b^m \quad [muaddil\ m] \quad [t]$$

olur.

Üssü aded-i aslî olan bir zû-haddeyn kuvvetlerinin bu hassası, üssü aslî olan zû-hudûd-ı kesîre kuvvetlerine de tatbik olunabilir. Mesela:

$$a + b + d + h + \cdots + f$$

gibi bir zû-hudûd-ı kesîrenin m kuvvetine tevsî'i matlûb olsun. Evvel-emirde (t) münasebetinden:

$$(a + b)^m - b^m \equiv a^m \quad [muaddil\, m]$$

müteâdilini istihraç ederiz. Sonra bu müteâdilde mademki her kemmiyyet aded-i tâmdan ibarettir, b yerine $b + d$ koruz:

$$(a + b + d)^m - a^m \equiv (b + d)^m \quad [muaddil\, m]$$

olur. Lakin t kaziyye-i umûmiyyesine tatbiken:

$$(b + d)^m \equiv b^m + d^m \quad [muaddil\, m]$$

olduğundan, yukardaki münasebette $(a + b)^m$ ifadesinin müsâvîsini mahalline koyalım:

$$(b + a + d)^m \equiv b^m + d^m + a^m \quad [muaddil\, m]$$

olur.

İşte bu minval üzere devam olunarak zû-hudûd-ı kesîre haddleri ne kadar olursa olsun şu ifadeyi elde etmiş oluruz:

$$(a + b + d + \cdots + f)^m \equiv a^m + b^m + d^m + \cdots + f^m \quad [muaddil\, m] \quad [S]$$

Bu da'vâ-yı nazarîden (Fermat) da'vası da istihraç olunur. Yukardaki zû-hudûd-ı kesîrede haddlerin adedi r kadar olsa da:

$$a = b = d = \cdots = f = 1$$

farz edilse $[S]$ münasebeti bize:

$$r^m \equiv r \quad [muaddil\, m] \qquad [F]$$

müteâdilini vermiş olur. Burada dikkat olunacak bir şey var ki o da: zû-hudûd-ı kesîrenin haddleri adedi olan (r)yi m üssü ile mütebâyin olarak almaktır. Bu hâlde F münasebetinin tarafeynini r ile taksîm caizdir. Bu takdirce:

$$r^{m-1} \equiv 1 \quad [muaddil\, m]$$

zuhur etmiş olur.

Şimdi bu kaziyenin son derece mühim neticeler vereceğini göreceğiz. İlk neticesi şudur:

$$x^{m-1} \equiv 1 \quad [muaddil\, m] \quad (1)$$

müteâdilinde m aslî olursa bunun cezrleri:

$$1, 2, 3, \dots, (m-1)$$

silsile-i a‘dâd-ı tabîiyyesidir. İşte bu hassa vasıtasıyla (Wilson) da’vâ-yı nazarîsi namıyla müştehir da’vanın bir ispatını elde etmek mümkündür.

86. **(Wilson) Da’vâ-yı Nazarîsi:** Eğer m aslî bir aded ise:

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (m-1) + 1$$

mecmûu m ile kâbil-i taksîmdir. Yani:

$$1.2.3.\dots(m-1) \equiv -1 \quad [muaddil\, m]$$

müteâdili sahihtir. Yahut $(m-1)!$ rumuzu birden $(m-1)$’e kadar olan silsile-i a‘dâd-ı tabîiyyenin hâsıl-ı darbını göstermiş olsa yukarıki müteâdil şöyle muhtasarca yazılabilir:

$$(m-1)! \equiv -1 \quad [muaddil\, m]$$

Zîrâ evvelki da’vada beyan etmiştik ki, eğer m aslî ise:

$$x^{m-1} - 1 \equiv 0 \quad [muaddil\, m]$$

müteâdilinin cezirleri:

$$1, 2, 3, \dots, (m-1)$$

silsile-i a'dâd-ı tabîiyyesidir. Bundan şu aşağıdaki münasebet elde edilir:

$$x^{m-1} - 1 \equiv (x-1)(x-2)\dots(x-m+1) \quad [muaddil\ m]$$

Bu son müteâdilde $x = 0$ farz edilerek mahalline konsa:

$$(m-1)! \equiv -1 \quad [muaddil\ m]$$

olup (Wilson) da'vâ-yı nazarîsi ispat edilmiş olur.

Burada şuna dikkat etmek lazımdır ki:

$$(m-1)! \equiv -1 \quad [muaddil\ m]$$

müteâdili eğer m aslî ise sahihtir. Eğer m gayr-i aslî ise kendinden küçük bir adedle kâbil-i taksîmdir.

Bu hâlde kendinden küçük bir adedin:

$$1, 2, 3, \dots, (m-1)$$

silsile-i a'dâd-ı tabîiyyesi dâhilinde bulunacağından m adedi:

$$1.2.3.\dots\ (m-1)$$

hâsıl-ı darbını da taksîm etmesi zaruridir. Bu hâlde m adedi 1'i de taksîm etmesi lazım gelir ki:

$$1.2.3.\dots\ (m-1) + 1 \equiv 0 \quad [muaddil\ m]$$

müteâdili sahih olabilsin. Hâlbuki (1)'i kendinden başka hiçbir aded taksîm edemez. Binaenaleyh m aslî olur ise yukardaki müteâdil sahihtir. Aksi takdirde sahih olamaz. Şu ifadâttan anlaşılıyor ki gerçi bu da'va sûret-i mutlakada bir adedin aslî olup olmadığını bildirir ise de bu amelî olmaktan ziyade nazarîdir; çünkü eğer aded küçük ise bunun tatbiki kolaydır. (7) gibi. Zîrâ:

$$1.2.3.4.5.6 + 1 = 721$$

adedi 7 ile kâbil-i taksîm olduğundan 7 adedinin aslî olduğu muhakkaktır. Lakin aded büyük olursa bu ameliyat o kadar güçleşir ki icrası hemen gayr-i kâbil bir hâle gelir.

87. (Wilson) da'vasının başlıca bir ispatı daha vardır ki o da şudur:

Müsbet ve m adedinden küçük herhangi bir f adedi olursa olsun alınmış olsa

$$fx \equiv 1 \quad (muaddil\, m)$$

müteâdilinde m aslî olduğundan x kemmiyyetinin yalnız bir tek cezri var ki bu müteâdile tevafuk eyler. Bu cezrin f' olduğunu farz edelim ve bunun da:

$$f.f' \equiv 1 \quad (muaddil\, m)$$

müteâdilini husûle getirdiğini tasavvur edelim. Burada f' mutlaka f'den başka bir adeddir. Zîrâ eğer f' adedi f adedine müsâvî olsa:

$$f^2 \equiv 1 \quad (muaddil\, m)$$

müteâdilinin ve bundan da:

$$(f+1)(f-1) \equiv 0 \quad (muaddil\, m)$$

münasebetinin husûle geleceği emr-i bedîhîdir. Bu münasebetten:

$$f = 1$$

Yahut:

$$f = m - 1$$

müsâvâtları elde edilir. Bunun için:

$$1.2.3.\dots(m-1) \quad [2]$$

silsile-i a‘dâd-ı tabîiyyesinden hadd-i evvel olan 1 ile hadd-i ahîr olan $(m-1)$ adedlerini ihraç eylesek geriye:

$$2.3.\dots(m-2)$$

kalır ki bunların içinden herhangi bir f bir b bir h adedleri alınırsa alınsın.

$$\left.\begin{array}{r} bb' \equiv 1 \\ aa' \equiv 1 \\ dd' \equiv 1 \\ \dots \\ \dots \\ hh' \equiv 1 \end{array}\right\} [muaddil\ m]$$

müteâdilleri husûle gelir. İşte bu:

$$(bb'); (aa'); \dots; (hh')$$

müzdeviçlerine [ki her ikisinin hâsıl-ı darbı 1 ile teâdül eder] müşterek adedler namı verilir. Mademki $a, b, \dots, h$ adedleri m’den küçüktür, bu hâlde bunlar:

$$2, 3, \dots, (m-1)$$

adedlerinden başka bir şey değildir. Bu takdirce:

$$2.3.4.\dots(m-2) \equiv (aa').(bb').\dots(hh') \equiv 1 \quad (muaddil\ m)$$

münasebeti husûle gelir.

Bu müteâdilin her iki tarafını $m-1$ ile darb edelim:

$$(m-1)! \equiv m-1 \equiv -1 \quad (muaddil\ m)$$

olur ki bu da (Wilson) da’vâ-yı nazarîsinden başka bir şey değildir.

88. İlm-i a'dâdda[9] pek meşhur ve pek mühim bir da'vâ-yı nazarî var ki ispatı (Wilson) da'vasıyla müyesser olur. İşte biz de şimdi (Wilson) da'vasını ispat ettik. Sıra bu meşhur da'vanın ispatına geldi. O da'va şudur:

"$4m + 1$ şeklinde bulunan her aded-i aslî, iki adedin murabba'ları mecmûuna müsâvîdir." Fakat bu da'vanın ispatına yardım edecek iki da'vâ-yı nazarî daha vardır ki bittabi evvel-be-evvel bunlardan bahsetmek icap eder.

89. Da'vâ-yı Nazarî: p aded-i aslî ve q adedi de $p - 1$'den asgar bir aded olsa:

$$(1).\, 1.2.3. \ldots q \times 1.2.3. \ldots (p - q - 1) + 1 \equiv 0 \quad (muaddil\ p)$$

olur. (Eğer q çift ise)

$$(2).\, 1.2.3. \ldots q \times 1.2.3. \ldots (p - q - 1) - 1 \equiv 0 \quad (muaddil\ p)$$

olur. (Eğer p tek ise)

Zîrâ, (Wilson) da'vasına nazaran

$$1.2.3. \ldots (p - 1) + 1 \equiv 0 \quad (muaddil\ p) \quad \ldots (u)$$

olup, bu son münasebetin sağ tarafındaki birinci haddini şöyle yazabiliriz:

$$1.2.3.4. \ldots (p - 2)p - 1.2.3.4. \ldots (p - 2)$$

Bundan:

$$1.2.3.4. \ldots (p - 2)p - [1.2.3.4. \ldots (p - 2) - 1] \equiv 0 \quad (muaddil\ p)$$

olur ki,

[9] Frenkçe Calculer hesâb etmek, Calcul de hesâb manasınadır. Hâlbuki Arithmétique kelimesine ilm-i hesâb diyoruz ki bu yanlıştır. Bunu (ilm-i a'dâd) diye tesmiye etsek daha münasip olur.

$$1.2.3.4.\dots(p-2)-1$$

tefâzulünün p ile kâbil-i taksîm olduğu neticesini verir.

Bu tefâzulün birinci haddi şu vech ile de yazılabilir:

$$1.2.3.4.\dots(p-3)p-1.2\times 1.2.3.4.\dots(p-3)$$

Bundan da şu:

$$1.2.3.4.\dots(p-3)p-[1.2\times 1.2.3.4.\dots(p-3)+1] \\ \equiv 0 \quad (muaddil\ p)$$

olup

$$1.2\times 1.2.3.4.\dots(p-3)+1$$

mecmûunun (p) ile kâbil-i taksîm olduğu tezahür eder.

Bu mecmûun da birinci haddini şu şekilde yazalım:

$$1.2\times 1.2.3.4.\dots(p-4)p-1.2.3\times 1.2.3.\dots(p-4)$$

Bundan da:

$$1.2\times 1.2.3.\dots(p-4)-[1.2.3\times 1.2.3.\dots(p-4)-1] \\ \equiv 0 \quad (muaddil\ p)$$

olur. Bundan:

$$1.2.3\times 1.2.3.4.\dots(p-4)-1$$

ifadesinin de p ile kâbil-i taksîm olduğu anlaşılır.

Bu muhakemeyi aynen takip ederek, şu aşağıdaki müteâdilleri müteakiben elde ederiz:

$$\left.\begin{array}{r}(1.2.3.4) \times [1.2.3. \ldots (p-5)] + 1 \equiv 0 \\ (1.2.3.4.5) \times [1.2.3. \ldots (p-6)] - 1 \equiv 0 \\ (1.2.3.4.5.6) \times [1.2.3. \ldots (p-7)] + 1 \equiv 0 \\ (1.2.3.4.5.6.7) \times [1.2.3. \ldots (p-8)] - 1 \equiv 0\end{array}\right\} \quad (muaddil\ r)$$

Ve bir sûret-i umumiyyede şu müteâdiller elde edilir:

$$(1).\ 1.2.3. \ldots q \times 1.2.3. \ldots (p-q-1) + 1 \equiv 0 \quad (muaddil\ p)$$

olur. (Eğer q çift ise)

$$(2).\ 1.2.3. \ldots q \times 1.2.3. \ldots (p-q-1) - 1 \equiv 0 \quad (muaddil\ p)$$

olur. (Eğer q tek ise)

İşte (1) ve (2) münasebetleri de bu vech ile ispat edilmiş oldu.

90. Da'vâ-yı Nazarî: Eğer p adedi $(4n+1)$ şeklinde bir aded-i aslî olsa:

$$(1.2.3. \ldots 2n)^2 + 1$$

ifadesi p ile kâbil-i taksîmdir. Zîrâ,

(1) münasebetinde q yerine $(2n)$ ve p yerine de $[4n+1]$ vaz' olunsa:

$$1.2.3. \ldots 2n \times [1.2.3. \ldots (4n+1-2n-1)] + 1 \equiv 0 \quad (muaddil\ p)$$

Yahut ıslah edildikte:

$$(1.2.3. \ldots 2n)^2 + 1 \equiv 0 \quad (muaddil\ p)$$

olup matlûb sabit olur.

İşte şimdi yukardaki pek mühim dediğimiz da'vâ-yı nazarîyi ispat ederiz:

91. Da'vâ-yı Nazarî: $(4n + 1)$ şeklinde bulunan her aded-i aslî, iki adedin murabba'ları mecmûuna müsâvîdir.

Zîrâ: bundan evvelki da'vada görmüş idik ki: p aded-i aslîsi:

$$(1.2.3.\ldots 2n)^2 + 1$$

ifadesini tamamen taksîm ediyor. Yani iki adedin murabba'ları mecmûunu taksîm ediyor. Öyle ise p adedi de iki murabba' mecmûuna müsâvîdir. Bu da'va o kadar mühimdir ki, yalnız bir cihetteki ehemmiyetini burada zikretmek kâfidir. Bundan sonra:

$$x^2 \equiv p \quad (muaddil\, m)$$

şeklinde ikinci dereceden bir meçhullü müteâdillerin hallerini göstereceğiz. Burada eğer:

$$m = 4n + 3$$

şeklinde ise bu müteâdili (Fermat) da'vasına tatbiken halledeceğiz. Lakin eğer:

$$m = 4n + 1$$

şeklinde ise, bu şekildeki a'dâd-ı asliyye de ya $(8n + 1)$ şeklindedir yahut $(8n + 5)$ şeklindedir.

İşte bu son şekildeki a'dâd-ı asliyye ya (Fermat) da'vasıyla hallolunur. Yahut [bazı inatçı a'dâd-ı asliyye var ki (Fermat) da'vasına ser-fürû etmez.] İşte o zaman $(8n + 5)$ şeklinde – ki bu da esasen $(4n + 1)$ şeklinden gelmişti – olan aded-i aslîyi iki adedin murabba'ları mecmûuna ayırıp meseleyi bununla halledeceğiz. Bir adedi iki murabba'a ayırmak için ayrıca kaide vardır. Onu da mahallinde bildireceğiz.

92. Da'vâ-yı Nazarî: Beynlerinde mütebâyin dört murabba'ı tamamen taksîm eden her adedin kendisi de dört murabba' mecmûuna müsâvîdir.

Zîrâ, farz edelim ki beynlerinde mütebâyin a, b, c, d adedlerinin murabba'ları mecmûu olan:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

ifadesini, herhangi bir t adedi olursa olsun tamamen taksîm ediyor.

Bu a, b, c, d adedlerinden her biri $\frac{t}{2}$'yi geçiyorsa, bunların yerlerine t muaddiline nazaran bakiyye-i asgariyye-i mutlakaları olan müsbet veya menfi:

$$a - \alpha t = a'$$

$$b - \beta t = b'$$

$$c - \gamma t = c'$$

$$d - \delta t = d'$$

adedlerini vaz' eylesek:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2$$

mecmûu da yine t ile kâbil-i taksîmdir.

Şüphesizdir ki bunların dördü birden $\frac{t}{2}$'ye müsâvî olamaz. Çünkü bunlar beynlerinde mütebâyin olduklarından hepsinin de zevc olmak ihtimali yoktur. Bu takdirce:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 < 4(\frac{t}{2})^2 = t^2$$

olur.

Öyle ise şu müsâvât doğrudur:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 = t.t' \quad \dots [1]$$

Burada yukarıki faraziyata göre $t' < t$ olmak zaruridir.

Eğer [1] müsâvâtında $t' = 1$ olsa, bu hâlde (t)'nin dört murabba'-ı mecmûuna müsâvî olduğu tahakkuk edip da'vamız sübut bulmuş olur.

Eğer $t' > 1$ ise burada da yine a', b', c', d' adedleri eğer $\frac{t'}{2}$'den a'zam iseler, bunların t' muaddiline göre bakiyye-i asgariyye-i mutlakaları alınarak:

$$(a' - st')^2 + (b' - rt')^2 + (c' - pt')^2 + (d' - qt')^2 = t't'' \quad [2]$$

müsâvâtı hâsıl olur ki burada $t'' < t'$'dür.

(1) ile (2) münasebetleri taraf tarafa darb edilseler:

$$k^2 + f^2 + n^2 + l^2 = t.t'^2.t''$$

müsâvâtı ber-vech-i âtî ifadelerle sahih olmuş olur:

$$k = a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 - (a's + b'r + c'p + d'q)t' = t'[t - a's - b'r - c'p - d'q]$$

$$f = (b's - a'r - c'p + d'q)t'$$

$$n = (c's - a'p - d'r + b'q)t'$$

$$l = (d's - a'q - b'p + c'r)t'$$

Yani şu eşkâlde kıymetler elde edilir:

$$k = a''t', \qquad f = b''t', \qquad n = c''t', \qquad l = d''t'$$

Bunlardan da şu münasebet husûle gelir:

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2 = tt''$$ [10] $$t'' < t$$

Burada eğer yine $t'' = 1$ ise da'vamız sabit olmuş olur.

Eğer böyle değilse, ber minvâl-i meşrûh devam edilerek şunlar gibi bir takım müsâvât istihsal edilir:

$$a'''^2 + b'''^2 + c'''^2 + d'''^2 = tt'''$$

...

...

$$a_m{}^2 + b_m{}^2 + c_m{}^2 + d_m{}^2 = tt_m$$

Yekdiğerini veli ederek tahaddüs eden $t', t'', t''', \dots, t_m$ adedleri mütenâzıran yekdiğerinden asgar a'dâd-ı tâmmeden ibarettirler.

Daima tenakus ederek ilâ-nihâye giden bu aded-i tâmlar bir zaman gelecek ki behemehâl bunlardan biri vâhide müsâvî bir aded zuhur edecektir. İşte o zaman t adedinin de dört murabba'-ı mecmûuna müsâvî olduğu tebeyyün edip matlûb sabit olacaktır.

93. Da'vâ-yı Nazarî: Mütebâyin iki adedin murabba'ları mecmûunu tamamen taksîm eden bir adedin kendisi de iki murabba'-ı mecmûuna müsâvîdir.

n adedi mütebâyin iki adedin murabba'ları mecmûu olan $h^2 + t^2$ ifadesini tamamen taksîm eden bir aded olsun. Burada h ve t adedlerinden beheri $\frac{n}{2}$'yi geçmez farz olunmuştur. Çünkü eğer bunun aksi zuhur ederse h yerine n muaddiline göre bakiyye-i asgariyye-i mutlakası olan:

---

[10] $a''^2\, t'^2 + b''^2\, t'^2 + c''^2\, t'^2 + d''^2\, t'^2 = tt'^2 t''$
Tarafeyn t'^2 ile taksîm edilirse:
$a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2 = tt''$

$$h - fn$$

Ve: t yerine de kezalik:

$$t - dn$$

vaz‘ olunarak işe mübaşeret olunur. Bu hâlde:

$$h^2 + t^2 = n.n' \quad (1) \qquad n' < \frac{n}{2}$$

Eğer burada $n' = 1$ ise da'vamız sübut bulmuş olur. Eğer $n' > 1$ ise o hâlde:

$$(h - dn')^2 + (t - pn')^2 = n'.n'' \quad [2]$$

$$\frac{n'}{2} > n''$$

1 ile 2 taraf tarafa darb edilseler:

$$(h^2 + t^2 - dhn' - ptn')^2 + (dtn' - phn')^2 = n.n'^2.n''$$

müsâvâtı husûle gelir. Bu müsâvâtın birinci haddinde bulunan:

$$h^2 + t^2$$

yerine müsâvîsi olan $n.n'$ vaz‘ edilse:

$$(n.n' - dhn' - ptn')^2 + (dtn' - phn')^2 = n.n'^2.n''^2$$

olup tarafeyn n'^2 ile taksîm edilse:

$$(n - dh - pt')^2 + (dt - ph)^2 = n.n''$$

olur. Burada $n'' = 1$ olursa da'vamız sübut bulmuş olur. Değilse: Ber minvâl-i meşrûh hareket ederek $n.n'$ hâsıl-ı darbından $n.n'''$ hâsıl-ı darbı $n.n'.n'', \ldots, n_m$ hâsıl-ı darbları istihsal edilmiş olur.

Mademki $n.n'.n'',\dots,n_m$ a‘dâd-ı tâmmesi mütenâzıran yekdiğerinin nısfından asgar olarak tahaddüs ediyor, bu hâl, ilâ-nihâye devam edemez; bunlardan biri behemehâl vâhide müsâvî olur. Bu takdirce de da’vamız sübut bulmuş olur.

94. Da’vâ-yı Nazarî: Her aded-i mürekkep, yani aslî olmayan her aded, $4\text{n} + 3$ şeklinde hiçbir madrûb-ı aslîye malik değilse, iki murabba’-ı mecmûuna müsâvîdir.

Zîrâ, bir aded-i mürekkebin madrûbât-ı asliyyesi, $2, 4n + 1, 4n + 3$ şekillerinden başka şekillerde değildir.

Eğer $4n + 3$ şekli bunlar meyanından tayy edilir ve: $2 = 1^2 + 1^2$ (yani iki murabba’-ı mecmûuna müsâvî) farz olunursa bu hâlde aded-i mürekkebin madrûbât-ı asliyyesinin kâffesi $4n + 1$ şeklinde ve iki murabba’-ı mecmûuna müsâvî olan 2 adedinden ibaret olur. Hâlbuki bundan evvelki da’vada t aded-i aslîsi $4n + 1$ şeklinde olursa, $t = b^2 + c^2$ gibi iki adedin murabba’ları mecmûuna müsâvî olduğu ispat edilmişti.

Bundan anlaşılır ki, aded-i mürekkep, beheri iki murabba’-ı mecmûuna müsâvî madrûbların hâsıl-ı darbından ibarettir. İki adedin murabba’ları mecmûunun diğer iki aded murabba’ları mecmûuna, hâsıl-ı darbı ise yine iki adedin murabba’ları mecmûuna müsâvîdir.

Mesela: $t = km$ gibi $k = 4n + 1$ ve $m = 4n' + 1$ şeklinde olan iki madrûbdan mürekkep t adedini alsak; bu hâlde mademki k ile m, $4n + 1$ şeklindedirler, bunlar:

$$k = b^2 + d^2 \quad ve \quad m = p^2 + q^2$$

gibi murabba’lar mecmûuna ayrılır. Bu takdirce şu aşağıdaki münasebet husûle gelir:

$$k.m = (b^2+d^2)(p^2+q^2) = b^2p^2 + b^2q^2 + d^2p^2 + d^2q^2$$
$$= [b^2p^2 + d^2q^2] + [d^2p^2 + b^2q^2]$$
$$= [b^2p^2 \mp 2\mathrm{bpdq} + d^2q^2]$$
$$+ [d^2p^2 \mp 2\mathrm{bpdk} + b^2q^2]$$
$$= [bp \mp dq]^2 + [dp \mp bq]^2$$

olur.

Şu son iki ifadeyi bir yerde gösterelim:

$$(b^2+d^2)(p^2+q^2) = [bp \mp dq]^2 + [dp \mp bq]^2$$

İşte bu suretle iki murabba'-ı mecmûunun diğer iki murabba'-ı mecmûuna hâsıl-ı darbının iki murabba'-ı mecmûuna müsâvî olduğu sübut bulmuş olur.

Bir misal yapalım:

$$k = 29, \quad m = 73 \text{ olsa}$$

$$29 = 2^2 + 5^2$$

$$73 = 3^2 + 8^2$$ [11]

olur. Burada $q = 8, p = 3, d = 5, b = 2$ olduğundan yukardaki müsâvâtta mahallerine vaz' ile:

$$(2^2+5^2)(3^2+8^2) = (2.3 \pm 5.8)^2 + (2.8 \mp 5.3)^2$$

olur ki bu da:

$$31^2 + (-34)^2 = 2117\ veya: 1^2 + 46^2$$

olur.

[11] $4n+1$ şeklindeki aslî bir adedin, ne vech ile iki murabba' mecmûuna ayrıldığını ileride iki muhtelif usul ile bi'l-isbât tayin edeceğiz.

95. **Da'vâ-yı Nazarî:** p adedi $4n+3$ şeklinde bir aded-i aslî olsa, ispat etmek matlûbdur ki p adedi:

$$(2n+1)!+1$$

Yahut

$$(2n+1)!-1$$

ifadelerinden birini behemehâl taksîm eder.

Zîrâ (89)'uncu da'vâ-yı nazarînin (2) ile işaret olunan münasebetinde q yerine, tek bir adedi gösteren ve $\frac{p-1}{2}$'yi irâe eden $2n+1$ vaz' olunsa [Çünkü burada $p=4n+3$ olduğundan $\frac{p-1}{2}=2n+1$ olur.]

$$(2n+1)! \times 1.2.3 \ldots (p-2n-1-1)-1 \equiv 0 \quad (muaddil\ p)$$

münasebeti hâsıl olur. Lakin bu münasebette bulunan:

$$p-2n-1-1=p-2n-2=4n+3-2n-2=2n+1$$

olduğundan mahalline vaz' ile:

$$(2n+1)! \times (2n+1)!-1 \equiv 0 \quad (muaddil\ p)$$

Veya:

$$[(2n+1)!]^2-1 \equiv 0 \quad (muaddil\ p)$$

olur. Bu ifade iki adedin murabba'ları beynindeki fazlı gösterdiğinden

$$[(2n+1)!+1][2n+1)!-1] \equiv 0 \quad (muaddil\ p)$$

müteâdili elde edilir ki madrûblardan birinin sıfır ile teadül etmesini yani p ile tamamen taksîm olmasını icap ettirip matlûb sabit olur.

96. Da'vâ-yı Nazarî: İsbat etmek matlûbdur ki eğer p aded-i aslî olursa $(p-1)!$ hâsıl-ı darbının:

$$1+2+\cdots+(p-1)$$

mecmûu üzerine taksîminden kalan bâkî $(p-1)$ adedine müsâvîdir. Zîra (Wilson) da'vâ-yı nazarîsi mûcibince:

$$(p-1)! = mp-1 = (m-1)p+(p-1) \ldots .[1]$$

müsâvâtı hâsıl olur.

Bu müsâvâtın sol tarafı ile sağ tarafının ikinci haddi, $p-1$ ile kâbil-i taksîm olduğundan sağ tarafın birinci haddi olan $(m-1)p$ adedinin de $(p-1)$ ile kâbil-i taksîm olması zaruridir. Bu hâlde:

$$(m-1)p = misl(p-1)$$

olur. Lakin $p, p-1$ adedleri mütebâyin olduklarından:

$$m-1 = q(p-1)$$

olması tabiidir. (1) ile işaret olunan müsâvâtta mahalline vaz' ile:

$$(p-1)! = q(p-1)p+(p-1)$$

olup bu müsâvât şöyle de yazılabilir:

$$(p-1)! = 2q \times \frac{p(p-1)}{2} + (p-1)$$

İmdi;

$$\frac{p(p-1)}{2} = 1+2+3+\cdots+(p-1)$$

olduğundan mahalline konarak:

$$(p-1)! = 2q[1+2+\cdots+(p-1)]+(p-1)$$

müsâvâtı elde edilir:

Bu müsâvâttan anlaşılıyor ki $(p-1)!$ hâsılının

$$1+2+3+\cdots+(p-1)$$

mecmûuna taksîminden kalan bâkî $(p-1)$'dir.

Tembih: Yukardaki son müsâvâta dikkatle bakılırsa görülür ki $(p-1)$ adedi $(p-1)!$ hâsıl-ı darbının

$$1+2+\cdots+(p-1)$$

mecmûunun 2 misline de taksîminden kalan bakiyedir.

Bir misal ile tavzîh-i merâm edelim: 7 aded-i aslîsini alalım:

$$\frac{1.2.3.4.5.6}{1+2+3+4+5+6}=\frac{710}{21}$$

olup burada 720 adedi 21 üzerine veya bunun 2 misli olan 42 adedi üzerine taksîminde, kalan bakiye $7-1=6$'dır.

97. Da'vâ-yı Nazarî: Eğer t adedi $(4n+1)$ şeklinde bir aded-i aslî, yani $t=4n+1$ olsa ispat etmek matlûbdur ki:

$$[(2n+1)(2n+2)\ldots\times 4n]^2+1\equiv 0 \quad (muaddil\ t)$$

olur.

Zîrâ (Wilson) da'vâ-yı nazarîsi bize şunu verir:

$$(t-1)!+1\equiv 0 \quad (muaddil\ t)$$

Lakin $t=4n+1$ olduğundan: $t-1=4n$ olur. Mahalline koyalım:

$$(4n)!+1\equiv 0 \quad (muaddil\ t)$$

Veya:

$$(4n)! \equiv -1 \quad (muaddil\ t)$$

olur. Terbî’ edelim:

$$[(4n)!]^2 \equiv 1 \quad (muaddil\ t) \quad \ldots (3)$$

Lakin 90’ıncı da’vâ-yı nazarî mûcibince:

$$[(2n)!]^2 \equiv -1 \quad (muaddil\ t) \quad \ldots [4]$$

olur. Hâlbuki 3 müsâvâtındaki $[(4n)!]^2$ ifadesi (1)’den $4n$ adedine kadar silsile-i a‘dâd-ı tabîiyye hâsıl-ı darbının murabba’ına müsâvî olduğundan şu veh ile de yazılabilir:

$$[(2n)! \times (2n+1)(2n+2) \ldots \times 4n]^2 = [(2n)!]^2 \times [(2n+1)(2n+2) \ldots \times 4n]^2$$

İşte 3 müsâvâtında sol tarafta müsâvîsi olan şu son ifade mahalline vaz‘ edilerek 4 münasebetiyle taraf tarafa taksîm edilse:

$$\frac{[(2n)! \times (2n+1)(2n+2) \ldots \times 4n]^2}{[(2n)!]^2} \equiv \frac{1}{-1} \equiv -1 \quad (muaddil\ t)$$

olup bundan:

$$[(2n+1)(2n+2) \ldots \times 4n]^2 \equiv -1 \quad (muaddil\ t)$$

Yahut:

$$[(2n+1)(2n+2) \ldots \times 4n]^2 + 1 \equiv 0 \quad (muaddil\ t)$$

olup matlûb sabit olur.

Gayr-i Müşterek'ül Mikyâs Adedler ve A'dâd-ı Muhdese veya Mevhûme

98. Bir kemmiyyet-i sâbite ile bir kemmiyyet-i mütehavvile beynindeki fazl istenildiği kadar asgar olabilirse [asla sıfır olamamak şartıyla] o kemmiyyet-i sâbite, kemmiyyet-i mütehavvilenin gayesidir denir.

Bu takdirce, (1) vâhid, şu: $0.999\ldots$ aded-i mütehavvilinin gayesidir. Zîrâ bu adedin kıyem-i müteâkıbesi şunlardır:

$$0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ 0{,}9999\ldots$$

Yani şu kesr-i a'şârîyi teşkil eden 9 adedini istediğimiz kadar alabiliriz. O kadar alabiliriz ki, artık vâhid ile bunun beynindeki fazl sıfır değilse de sıfıra pek yakındır.

Tembih: Gayr-i müşterek'ül mikyâs kemmiyâtın tarifine girişmeden evvel, iki da'vâ-yı nazarînin bilinmesine lüzum vardır. Onlar da şunlardır:

99. Da'vâ-yı Nazarî-1: Bir kesr-i mürcia'nın murabba'ı da bir kesr-i mürcia'dır. Zîra mürcia' farz edilen $\frac{a}{b}$ kesrinin haddleri olan a ile b adedleri mütebâyindirler. Bunlar, kendi kendilerine darb edilseler, hâsıl-ı darblar, ki $a.a = a^2$, $b.b = b^2$ 'dir, bunların da mütebâyin olacakları bedihidir. Çünkü bu hâsıl-ı darbda a ile b'den başka hiçbir madrûb yoktur. Bu sebepten $\frac{a^2}{b^2}$ kesri de bu mürcia' olup matlûb sabit olur.

Netice: Bu da'vâ-yı nazarîden anlaşılır ki $\frac{a}{b}$ gibi bir kesr-i mürcia', herhangi bir n kuvvetine olursa olsun ref' edilse, hâsıl-ı merfû'un da herhâlde bir kesr-i mürcia'dan ibaret olacağı bedihidir.

100. Da'vâ-yı Nazarî-2: Bir aded-i tâmmın murabba'ı olmayan bir aded-i tâm, bir kesirin de murabba'ı olamaz.

Mesela, 15 adedini ele alalım. Bu aded, hiçbir aded-i tâmmın murabba’ı değildir. Bu hâlde $\frac{a}{b}$ gibi bir aded-i kesrin de murabba’ı olamaz.

Zîrâ, eğer murabba’-ı tâmmı 15 adedine müsâvî $\frac{a}{b}$ gibi bir kesrin vücudu tasavvur olunsa, bu adedin yerine bu kesrin murabba’ı da konabilir. Hâlbuki bundan evvelki da’vâ-yı nazarîde ispat edildiği vech ile bir kesr-i mürcia‘nın murabba’ı da bir kesri mürcia‘dan ibarettir. Bu sebepten, $\frac{a^2}{b^2}$ bir kesr-i mürcia‘dır. Hiçbir vakit aded-i tâm olan 15 adedine müsâvî olamaz. Bu suretle da’vamız da sübut bulmuş olur.

Şimdi gelelim 2 adedinin cezr-i murabba’ının tarifine: Bundan evvelki da’vâ-yı nazarîde görmüş ve ispat etmiştik ki, gerek aded-i tâm olsun gerekse kesir olsun hiçbir aded yoktur ki, murabba’ı 2 adedine müsâvî olsun. Bu takdirce, $\sqrt{2}$ şimdilik bizim için manasız bir rumuzdan ibarettir.[12]

$\sqrt{2}$ rumuzunun tarifine gelmek, ve onu idrak etmek için 2 adedini, herhangi murabba’-ı tâm bir adedin olursa olsun ve mesela 100 adedinin şu:

$$\overline{100}^0 = 1,\ \overline{100}^1 = 100,\ \overline{100}^2 = 10000\ \ldots$$

Kuvâ-yı müteâkıbesiyle darb ve taksîm edelim. Bu hâlde şu:

$$\frac{2.1}{1},\ \frac{2.100}{100},\ \frac{2.\overline{100}^2}{\overline{100}^2},\ \frac{2.\overline{100}^3}{\overline{100}^3}$$

[12] Eğer: “Kendi nefsine darb edilen bir aded 2 adedini vücuda getirirse bu aded 2 adedinin cezr-i murabba’ıdır.” demiş olsak bir hatâ-yı fâhiş îkâ etmiş oluruz. Çünkü $\sqrt{2}$ ile darb edilen adedin tarifinde, evvelce $\sqrt{2}$ rumuzunun tarifini bilmek lazımdır.

gayr-i mahdûd silsilesini vücuda getirmiş oluruz, bu silsilenin her bir haddi 2 adedine müsâvîdir. Bu silsiledeki ifâdât-ı kesriyyeden beherinin suretlerinin, bir noksanına ve bir fazlasına cezr-i murabba'larını alarak ve kendi mahreclerinin cezr-i murabba'ına taksîm ederek şu iki yeni silsileyi husûle getirmiş oluruz:

$$1, \ \ 1.4, \ \ 1.41, \ \ 1.414, \ \ 1.4142, \ \ \ldots (A)$$

$$1, \ \ 1.5, \ \ 1.42, \ \ 1.415, \ \ 1.4143, \ \ \ldots (B)$$

İmdi,

$\mathbf{1^0}$. (A) silsilesinin haddleri mütezâyiden gidiyor;

$\mathbf{2^0}$. (B) silsilesinin haddleri ise mütenâkıstır.

$\mathbf{3^0}$. Bu iki silsilenin mütekabili her iki haddi beynindeki fazl, nâ-mütenâhî bir surette tenakus ediyor; şu hâlde ki, sıfır değil, fakat sıfıra pek yakın raddede tenakus ediyor. Mademki, iş böyledir ve bundan başka da (A) veya (B) silsilelerinin hâvî oldukları haddlerin murabba'ları, müşterek bir gayeye yani 2 adedine maliktirler; bu haddlerin de;

(1) ile (2), $(1{,}4)$ ile $(1{,}5)$, $(1{,}41)$ ile $(1{,}42)$ $\ldots.\,ilh.$ haddleri arasında bir gaye vardır ki, işte bu gayeye 2'nin cezr-i murabba'ı namı veriliyor. Bu takdirce, (2) cezr-i murabba'ı, murabba'larının gayesi (2) olan adedlerin gayesidir.[13]

Şimdi bu tarif edegeldiğimiz husûsâtı şu aşağıdaki izahatla tenvir edeceğiz:

Ben dedim ki, (A) yahut (B) silsilelerinde bulunan haddlerin murabba'ları, aynı gayeye, yani 2 adedine maliktirler.

---

[13] Bu tarif, vaktiyle (Catalan) tarafından teklif edilmiş ve fakat o zaman red olunmuştu. Muahharen bu teklif kabul edilmiştir.

Zîrâ, şu münasebetleri nazar-ı dikkate alalım:

$$2 - \overline{1.4}^2 < 1.5^2 - 1.4^2, \qquad \overline{1.5}^2 - 2 < \overline{1.5}^2 - \overline{1.4}^2$$

$$2 - \overline{1.41}^2 < \overline{1.42}^2 - \overline{1.41}^2, \qquad \overline{1.42}^2 - 2 < \overline{1.42}^2 - \overline{1.41}^2$$

$$2 - \overline{1.414}^2 < \overline{1.415}^2 - \overline{1.414}^2, \qquad \overline{1.415}^2 - 2 < \overline{1.415}^2 - \overline{1.414}^2.$$

$$\ldots$$

İmdi,

$$\overline{1.5}^2 - \overline{1.4}^2 = (1.5 + 1.4).(1.5 - 1.4) = 2.9 \times 0.1 = 0.29$$

$$1.42^2 - 1.41^2 = (1.42 + 1.41).(1.42 - 1.41) = 2.83 \times 0.01 = 0.0283$$

$$\overline{1.415}^2 - \overline{1.414}^2 = (1.415 + 1.414).(1.45 - 1.44) = 2.829 \times 0.001 = 0.002829$$

...

Bu sebepten:

$$2 - \overline{1.4}^2 < 0.29, \qquad \overline{1.5}^2 - 2 < 0.29,$$

$$2 - \overline{1.41}^2 < 0.0283, \qquad \overline{1.42}^2 - 2 < 0.283,$$

$$2 - \overline{1.44}^2 < 0.002829, \qquad \overline{1.45}^2 - 2 < 0.002829.$$

...

Ve evleviyetle:

$$2 - \overline{1.4}^2 < 0.3, \qquad \overline{1.5}^2 - 2 < 0.3,$$

$$2 - \overline{1.41}^2 < 0.03, \qquad \overline{1.42}^2 - 2 < 0.03$$

$$2-\overline{1.414}^2<0.003, \qquad \overline{1.415}^2-2<0.003$$

$$\ldots$$

İşte şu:

$$\overline{1.4}^2, \quad \overline{1.41}^2, \quad \overline{1.4}14^2, \quad \ldots$$

adedlerinin gâye-i ulyâları: (2)'dir. Ve şu:

$$\overline{1.5}^2, \overline{1.42}^2, \quad \overline{1.415}^2 \ldots$$

adedlerinin gâye-i süflâları da: (2)'dir

İşte şu tafsilattan anlaşılır ki, 2 adedinin cezr-i murabba'-ı takrîbîsi 1 noksanına:

$$1.4, 1.41, 1.414 \ldots$$

Ve vâhid fazlasına:

$$1.5, 1.42, 1.415 \ldots$$

adedleridir.

100. Ta'rîf-i umûmî: Hiçbir aded-i tâmmın ve hiçbir aded-i kesrînin n'inci kuvveti olmayan ve n'inci kuvvetlerinin gayesi (A) olan adede, (A) adeddinin n'inci kuvvetten cezri derler.

İşte bu tarifle mevcudiyeti tahakkuk eden şu yeni adede: (aded-i asamm) veya: (gayr-i müşterek'ül mikyâs) aded tesmiye ederler. [14]

[14] A'dâd-i asammeden başka, (gayr-i müşterekü'l-mikyâs) diğer adedler daha vardır ki: bunlara: (a'dâd-i âliye-Nombres transcendants) namı verilir ki, muhît-i dâirenin kutruna nisbeti olup π ile gösterilen aded ile tabii logaritmaların kaideleri olan e adedleri: (a'dâd-ı âliye) dendir.

101. Her hangi bir kuvvetten olursa olsun, bir adedin cezrini tevlîd eden şekl-i umûmî şudur:

$$\sqrt[b]{c} = a$$

Şimdi, şu şekli nazar-ı dikkate alarak b ve c adedlerinin halleri ve işaretleri değiştikçe a adedinin kıymeti ve işareti üzerinde ne gibi tesirler icra edeceğini nazar-ı imtihandan geçirelim:

1^0. Meczur ile cezriye üssü aded-i tâm ve müsbettirler.

Hâsıl-ı cezr bittabi müsbettir. Lakin bir sûret-i umûmiyyede aded-i tâm olmasına hüküm verilemez. Zîrâ madrûbata ayrılmayan a‘dâdın mevcut olduğunu der-hatır etmek kâfidir. Eğer böyle bir adede tesadüf edilirse, anlaşılır ki, a adedi, meczur (c)'nin ve üssü (b)'nin her kıymeti için aded-i tâm olamaz.

Mesela, 5 adedinin cezr-i murabba'ı olan $\sqrt{5}$ rumuzu asla bir aded-i tâm veremez. Zîrâ 5 adedi aslîdir. Yani kendisiyle vâhidden başka hiçbir madrûba malik değildir.

Kolaylıkla görülür ki, $\sqrt{5}$ ifadesinin kıymet-i adediyyesi: 2 ile 3 arasındadır. Çünkü $2^2 = 4$ ve $3^2 = 9$'dur. Lakin 2 ile 3 arasında kıyem-i muhtelifeleri ile nâ-mütenâhî a‘dâd-ı kesriyye mevcuttur. Vehle-i ûlâda bunlardan biri $\sqrt{5}$ adedine müsâvî farz edilerek alınmak ihtimali vârid-i hâtır olursa da, bu, hakikate münafidir. Zîrâ a‘dâd-ı kesriyyenin bütün kuvvetleri de a‘dâd-ı kesriyyedir. Bu sebepten yukarıki faraziye batıldır. Bu hâlde, a'dâd-ı tâmme ve kesriyyeden başka diğer bir nev‘ a‘dâdın vücudu olmak lazımdır ki, işte bu yeni a‘dâda: (a‘dâd-ı asamm) yahut: (gayr-i müşterekü'l mikyâs aded) isimleri verilmiş idi. Çünkü bu adedin vâhidleri ile olan nispetleri tamam olarak tayin olunamaz.

İmdi, şu:

$$\sqrt[b]{(+c)} = a$$

şekl-i umûmîsinde a hâsıl-ı cezri aded-i tâm olmadıkça, behemehâl, (gayr-i müşterekü'l-mikyâs) bir adeddir. İşaretine gelince: b adedi tek oldukça her hâlde müsbettir. Lakin b çift bir aded olursa, a adedi ya müsbet veya menfi olmak ihtimali vardır. Zîrâ herhangi bir çift adedi olursa olsun onu $(2m)$ ve tek adedi de $(2m + 1)$ ile gösterebiliriz. Bu hâlde şu münasebât tahaddüs eder.

$$(+a)^{2m+1} = +c$$

$$(+a)^{2m} = +c, (-a)^{2m} = +c$$

Şimdi, şu ifadelerin (üs)'leri mûcibince tarafeynin cezirlerini almış olsak, sırasıyla şu müsâvâtlar zuhura gelir:

$$\sqrt[2m+1]{+c} = +a, \quad \sqrt[2m]{+c} = +a$$

$$\sqrt[2m]{+c} = -a$$

Görülüyor ki, a'dâd-ı müsbetenin ferd kuvvetten cezirleri yalnız müsbet bir kıymete maliktirler. Hâlbuki bunların zevc kuvvetten cezirleri, kıymet-i adediyyece müsâvî iseler de işaretçe mugâyirdirler. Bu hususiyet, cezri alınan adede (±) gibi çift işaret verilerek tefrik olunur. Şunun gibi:

$$\sqrt[2m]{+c} = \pm a$$

101. Kemmiyyât-ı mevhûmenin kuvvetleri, pek büyük, pek mühim dikkatle mütalâa ve teftişe şayandır. Zîrâ bu kemmiyyât-i mevhûme kemmiyyâtın tevlidi hususunda en mühim bir unsuru teşkil eder.

Eğer, basit olan $\sqrt{-1}$ kemmiyyet-i mevhûme, murabba'ını teşkil etmek için kendi nefsine darb edilse şu aşağıdaki iafedeler husûle gelir.

$$\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{+1} = \pm 1$$

Lakin bunun üst işareti olan $(+)$'yı kabul etmek, bâtıl, abes bir neticeye sebebiyet vermektir. Zîrâ yukardaki ifadeyi $(+1)$ olarak alalım:

$$\left(\sqrt{-1}\right)^2 = +1$$

Bundan:

$$\sqrt{-1} = \sqrt{+1}$$

müsâvâtı hâsıl olur ki butlân-ı sırfedir: Hakikate külliyen mugâyirdir.

İmdi, eğer $\sqrt{-1}$ kemmiyyetinin murabba'ını teşkil etmek için, kuvâ-yı kesriyye kullanılmış olsa, (±) işaretleri hakkındaki şek ve tereddüt izale edilmiş olur. Ve $\sqrt{-1}$ kemmiyyetinin murabba'ı olarak yalnız (-1) adedi bulunmuş olur ki, fi'l-hakika ve bizzarure de böyle olmak lazım gelir. Zîrâ bir cezr-i murabba'ının terbîi, cezri alınan addedden ibarettir.

Çünkü,

$$\left(\sqrt{-1}\right)^2 = (-1)^{\frac{2}{2}} = (-1)^1 = -1$$

Aynı mülahaza, $\sqrt{-1}$ kemmiyyetinin bütün çift kuvvetleri hakkında yapılmalıdır.

102. $\sqrt{-1}$ kemmiyyetinin kuvâ-yı müteâkıbesi, yukardaki mülâhazata istinaden yapılacak olursa, şu aşağıdaki münasebât husûle gelir.

$$\left(\sqrt{-1}\right)^0 = +1$$

$$\left(\sqrt{-1}\right)^1 = +\sqrt{-1}$$

$$\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

$$\left(\sqrt{-1}\right)^3 = (-1)^{\frac{3}{2}} = (-1).(-1)^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{-1}$$

$$\left(\sqrt{-1}\right)^4 = (-1)^{\frac{4}{2}} = (-1)^2 = +1$$

$$\left(\sqrt{-1}\right)^5 = (-1)^{\frac{5}{2}} = (-1).(-1)^{\frac{1}{2}} = +\sqrt{-1}$$

$$\left(\sqrt{-1}\right)^6 = (-1)^{\frac{6}{2}} = (-1)^3 = -1$$

$$\left(\sqrt{-1}\right)^7 = (-1)^{\frac{7}{2}} = (-1)^3.(-1)^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{-1}$$

$$ilh = \cdots \quad ilh.$$

Eğer, bu cetvel temdit ve tevsî‘i edilecek olursa daima âtîde dört netice elde edilmiş olur:

$$+1, \quad +\sqrt{-1}, \quad -1, \quad -\sqrt{-1}$$

İşte bunları nazar-ı dikkate alarak, kıyas tarikiyle $\sqrt{-1}$ kemmiyyetinin kuvvetlerinin devrî olduğuna hükmedilebilir.

103. Şurasını da zikre şayan görürüz ki, $\sqrt{-n}$ ifadesi her zaman $a\sqrt{-1}$ şeklinde irca edilebilir. Mesela $n = 25$ farz olunsa, yukardaki

$$\sqrt{-n} = \sqrt{-25}$$

olur ki bu da:

$$\sqrt{25 \times -1} = 5\sqrt{-1}$$

olur.

İşte, $\sqrt{-n}$ şekli: $a\sqrt{-1}$ şekline girdi.

Kezalik, $n = 18$ farz olunsa,

$$\sqrt{-n} = \sqrt{-18} = \sqrt{9 \times 2 \times -1} = 3\sqrt{2}.\sqrt{-1}$$

olup yine $\sqrt{-n}$ şekli $a.\sqrt{-1}$ şekline girmiş olur.

Şimdi bu ciheti iyice belledikten ve aşağıda (Gauss)'un rumuzunu da kabul ettikten sonra, yukarda beyan etmiş olduğumuz:

$$\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{+1} = \pm 1$$

güçlüğü izale edilmiş olur.

(Gauss), her kemmiyyet-i mevhûmenin, nihayet irca edildiği $\sqrt{-1}$ rumuzunu: i harfiyle göstermiştir.

Mesela:

$$\sqrt{-a}.\sqrt{-a}$$

hâsıl-ı darbında ve daha hakikisi $(-a)$ kemmiyyetinin terbii hususunda darb ameliyatıyla yapılan güçlük:

$$i\sqrt{a}.i\sqrt{a} = i^2 a = -a$$

ameliyesinde görülmez.[15]

İhtar: Gerek gayr-i müşterek'ül mikyas adedleri hakkında ve gerekse a'dâd-ı mevhûme husunda vermiş olduğumuz malumat

---

[15] Çünkü, $\sqrt{-a}$ kemmiyyet-i mevhûmesi ulûm-u riyaziyeye idhal edildiği zaman: $\sqrt{-1}$ veya $\sqrt{-a}$ rumuzunun terbii behemehal (-1) veya $(-a)$'dır diye kabul edilmesi şart-ı kati ile tayin edilmiştir. Bana kalırsa bu şarta lüzum yoktur. Zîrâ, yukarda kuvvetler vasıtasıyla icra-ı amel edildiği takdirde

$$\left(\sqrt{-1}\right)^2 = (-1)^{\frac{2}{2}} = (-1)^1 = -1$$

neticesi elde edildiği cihetle matlûb hâsıl oluyor demektir.

kâfidir. Çünkü bu iki bahis ulûm-u riyaziyede gayet vasi bir saha işgal eder ki hesâb-ı nazarî hudûdundan hariçtir.

Kuvve-i Muhâkemenin Tevsî'ine Yardım Eden ve A'dâd Fikr ü Mefhûmunu Zihne İlkâ Eyleyen Bir Takım Mes'ele-i Mühimme

104. Sual 1- Üç rakamlı bir aded-i tâm bulmak matlûbdur ki, bu aded, kendi rakamları hâsıl-ı darbına taksîm edilirse, hâric-i kısmet, adedin miât mertebesi rakamına müsâvî olsun?

Sualin Halli:

Matlûb adedin miât, aşerât, âhâd rakamlarını sırasıyla c, d, u ile gösterelim. Ber-mûcib-i ifâde şu:

$$\frac{100c + 10d + u}{c.d.u} = c$$

münasebeti husûle gelir.

Bundan:

$$u = \frac{10(10c + d)}{c^2 d - 1}$$

ifadesi istihsal olunur. Bu münasebet şöyle de yazılabilir:

$$u = \frac{10}{\frac{c^2 d - 1}{10c + d}} \quad \dots (1)$$

İmdi, 10'dan küçük olan u adedinin, tam olması, yukarıki münasebetin mahreci olan $\frac{c^2 d - 1}{10c + d}$ ifadesinin, 10 adedinin $2, 5, 10$ madrûblarından birine müsâvî olmasına vabestedir.

Bu üç faraziyeyi nazar-ı teftişten geçirelim.
$\mathbf{1^0}$. $\frac{c^2d-1}{10c+d} = 10$

Bu müsâvâttan şu münasebet hâsıl olur:

$$d = \frac{100c+1}{c^2-10} \dots \quad (2)$$

Bu ifâde-i kesriyyenin sureti müsbet olduğundan mahrecinin de müsbet olması şarttır. Öyle ise c adedinin en küçük kıymeti 4'tür. Zîrâ 3 olsa $c^2 = 9$ eder ki, bu hâlde $9 - 10 = -1$ olur. Bu ise muhâlif-i hakîkattir.

Bundan başka, $(100c + 1)$ sureti, bir aded-i ferdî gösteriyor. Bu hâlde mademki d bir aded-i tâm olacak $(c^2 - 10)$ mahrecinin de tek olması zaruridir. $(c^2 - 10)$ ifadesinin ferd olması ise, c adedinin tek olmasına mütevakkıftır. Bu hâlde, c adedinin $5, 7, 9$ adedlerinden birine müsâvî olması zaruridir.

Şimdi, bu üç adedi tecrübe edelim:

$c = 5$ olduğuna göre (2) müsâvâtından

$$d = \frac{501}{15} = \frac{167}{5}$$

kıymeti kabule şayan değildir.

$c = 7$ olduğuna göre

$$d = \frac{701}{39}$$

Kezalik şâyân-ı kabûl değildir. Velhâsıl

$c = 9$ olduğuna göre

$$d = \frac{901}{71}$$

de muvâfık-ı hakîkat değildir.

2^0. Farz edelim ki,

$$\frac{c^2d - 1}{10c + d} = 5$$

olsun. Bundan şu münasebet husûle gelir.

$$d = \frac{50c + 1}{c^2 - 5}$$

Bu ifâde-i kesriyyenin mahreci olan $(c^2 - 5)$ tefâzulünün sıfırdan a'zam olması iktiza ettiğinden c adedinin en küçük kıymeti: 3'tür.Zîrâ 2 olmuş olsa $4 - 5 = -1$ olur ki, abestir.

$50c + 1$ sureti bir aded-i ferdi irâe ediyor; mahrecin de tek bir aded olması zaruridir. Çünkü d adedi tamdır. Öyleyse, c adedinin çift olması icap eder. 3'ten 9 adedine kadar çift adedler: $4, 6, 8$ adedleridir. Şimdi, bu üç adedi tecrübe edelim.

$c = 4$ olduğuna göre $d = \frac{201}{11}$ kabule şayan değildir.

$c = 6$ olduğuna göre $d = \frac{301}{31}$ kabule şayan değildir.

$c = 8$ olduğuna göre $d = \frac{401}{59}$ kabule şayan değildir.

3^0. $\frac{c^2d-1}{10c+d} = 2$

Bu da bize şu müsâvâtı verir:

$$d = \frac{20c + 1}{c^2 - 2}.$$

Burada, c vâhidden a'zamdır ve tek bir aded olması da lâ-büddür. Öyle ise, c adedinin: $3, 5, 7, 9$ adedlerinden birine müsâvî olması zaruridir.

$c = 3$ olduğuna göre $d = \frac{61}{7}$ şayan-ı kabul değildir.

$c = 5$ olduğuna göre $d = \frac{101}{23}$ şayan-ı kabul değildir.

$c = 7$ olduğuna göre $d = \frac{141}{47} = 3$ bu aded şâyân-ı kabûldür. Bu hâlde (1) ile irâe olunan münasebetten $u = \frac{10}{2} = 5$ elde edilip aded-i matlûbun (735) olduğu tahakkuk etmiş olur.

$$\frac{735}{7 \times 3 \times 5} = \frac{735}{105} = 7.$$

$c = 9$ olduğuna göre

$$d = \frac{181}{75}$$

olup, bu da meseleye tevafuk etmeyen adedlerden biridir. Bu takdirce, bu suale muvafık yalnız (735) adedidir.

105. Sual 2- Üç rakamlı bir aded-i tâm bulunuz. Şöyle ki: bu adedin -mümkün olduğu kadar- rakamlarından ikişer ikişer terkip edilerek, husûle gelen altı adedin mecmûu, adedin kendisine müsâvî olsun.

Sualin Halli:

Bulunması matlûb adedi, (N) farz edelim ve bunun miât, aşerât, âhâd mertebesinin rakamlarını – sırasıyla – c, d, u ile irâe edelim. N adedinin her iki rakamından – mümkün olabildiği kadar - terkip edilerek vücuda gelen altı aded şunlardır:

$$(10c + d), \quad (10c + u), \quad (10d + c), \quad (10d + u),$$
$$(10u + d), \quad (10u + c)$$

Şimdi sualin ifadesine göre şu müsâvât husûle gelir:

$$N = 10c + d + 10c + u + 10d + c + 10d + u + 10u + d + 10u + c$$

Bu da hallolundukta:

$$N = 22(c + d + u) \quad \ldots (1)$$

müsâvâtı tahaddüs eder.

Şu müsâvâttan anlaşılır ki, (N) adedinin (11) adediyle kâbil-i taksîm olması iktiza eder. Öyle ise, (11) ile kâbiliyyet-i taksîm kavâidinden birine istinaden[16] husûle gelen

$$u + c - d \equiv 0 \quad (muaddil\ 11)$$

müteâdilini ele alalım.

İmdi, u, c, d adedlerinden beheri mademki, 10 adedinden asgardırlar; bu hâlde:

$$u + c - d = 0\ veya\ 11$$

olmak zaruridir.

Çünkü u, c adedlerinden beheri 9 adedine ve d adedi de sıfıra müsâvî olduğu farz edilse bile

$$u + c - d = 18$$

olur ki, (11)in iki misli olan 22 adedine vasıl olamaz. Bu hâlde

$$u + c - d = 11\ veya\ sıfırdır.$$

[16] 11 ile kâbiliyyet-i taksîm kavâidinin pek çok ve muhtelif oldukları yukarda kâbiliyyet-i taksîm bahsinde geçmiştir.

Birinci faraziye yani:

$$u + c - d = 11$$

faraziyesi şâyân-ı kabûl değildir. Çünkü bu müsâvâttan

$$d = u + c - 11 \quad \dots (2)$$

münasebeti tahaddüs edip (1) müsâvâtında d yerine müsâvîsi ve N yerine de, bunun müsâvîsi olan

$$(100c + 10d + u)$$

konup hall ve ıslah edilse,

$$u - 4 = 2c$$

Bundan da:

$$c = \frac{u}{2} - 2$$

münasebeti elde edilir.

Lakin (1) müsâvâtında, N adedinin çift bir aded olduğu aşikârdır. Bu hâlde u adedinin:

$4, 6, 8$ kıymetlerine göre:

$c = 2, 1, 0$ olup,

$c + u = 10, 7, 4$ olur ki, (2) müsâvâtında bu adedlerden hiçbiri 11'den tarh edilemez, yani tarh edilse tefâzul menfi bir aded çıkar ki muhâlif-i hakîkattır. Şimdi,

$$u + c - d = 0$$

faraziyesini ele alalım. Bundan:

$$u + c = d$$

münasebeti tahaddüs eder.

Burada, yine yukardaki gibi hareket ederek, yani (1) müsâvâtında N ve d kemmiyyetlerinin müsâvâtlarını mahallerine vaz‘ ile hall ve ıslah eyleyerek,

$2c = u$, bundan da $c = \frac{u}{2}$ bulunmuş olur.

u yalnız şu kıymetleri alabilir: $0, 2, 4, 6, 8$

Bu hâlde c de şu adedlere müsâvî olur: $0, 1, 2, 3, 4$

d de şu adedlere müsâvî olur: $0, 3, 6, 9, 12$

Velhâsıl, şu son münasebetler taharrî olunursa, görülür ki aranılan adedler, yalnız şunlardan ibarettir: $132, 264, 396$.

Planude Meseleleri

106. 1^0. Sual 3: Çevreleri, yani dört dıl‘ları mecmûu yekdiğerine müsâvî iki mustatîlin adlâ‘ını bulmak matlûbdur. Şöyle ki, bu dıl‘lar hep a’dâd-ı tâmmeye ve mustatîllerin mesâha-i sathiyyeleri beynindeki nispet, herhangi verilen yani malum olan bir (q) aded-i tâmmına müsâvî olacak?[17]

2^0. Sual: İki mütevâzi’l-mustatîlâtın adlâ‘ını bulmak matlûbdur ki, bunların adlâ‘ı mecmûu a’dâd-ı tâmme olarak yekdiğerine ve mesâha-i sathiyyeleri veyahut hacimleri beynindeki nispet verilen bir aded-i tâmma müsâvî olsun?

[17] Planude bu iki mustatîlin adla‘ını mütenâzıran şöyle bulmuştur:

$$q^2 - 1, \qquad q^3 - q^2, \qquad q - 1, \qquad q^3 - q$$

Lakin bu güzel hallin nasıl bulunduğunu söylememiştir.

Meselenin Sûret-i Halli:

1^0. Mustatîlin birinin irtifâ ve kaidesini: x, y harfleriyle, diğerininkileri de: v, b ile göstermiş olsak, ber-mûcib-i mes'ele şu:

$$x + y = v + b, \quad \frac{xy}{vb} = q \text{ [18]} \quad (1)$$

Yahut:

$$xy = q.vb \quad \ldots(2)$$

muâdelelerinin a'dâd-ı tâmme olarak hallerini bulmak iktiza eder. (2)'nci müsâvâttan:

$$\frac{x}{q} = \frac{vb}{y} = m$$

münasebeti bulunur. Bundan da:

$$x = qm, \quad y = \frac{vb}{m}$$

tahaddüs eder.

Bu müsâvâtları (1)'de mahalline koruz:

$$qm + \frac{vb}{m} = v + b$$

olur.

$\frac{vb}{m}$ aded-i tâm vermek için

$$v = mn \quad \ldots(3)$$

farz edersek,

[18] Burada (q) yine nisbet-i ma'lûmeyi yani malum olarak verilen adedi irâe ediyor.

$$qm + nb = mn + b$$

olup bundan,

$$m = \frac{b(n-1)}{n-q} \quad \dots (4)$$

istihsal olunur.

(m)'nin aded-i tâm olması için

$$n = q + 1$$

farz ederek (4)'te (3)'te ve daha yukarıya doğru müsâvîler mahalline vaz' edildikte:

$$m = bq, \qquad v = bq(q+1), \qquad x = bq^2, \qquad y = b(q+1)$$

olur.

Şimdi hülâsa edelim:

Birinci mustatîlin bir dıl'ı:

$$x = bq^2$$

Diğer dıl'ı da:

$$y = b(q+1)$$

dir.

İkinci mustatîlin bir dıl'ı:

b (ki aynen bunu malum farz ediyoruz)

Diğer dıl'ı da:

$$v = bq(q+1)$$

dir.

Bu hall kâfidir. Yani meseleye muvafıktır. Çünkü,

$$x + y = bq^2 + bq + b$$

ve

$$b + v = b + bq^2 + bq$$

olup, çevrelerin yekdiğerine müsâvî olduğu muhakkaktır. Sahalarının nispetlerine gelince:

$$\frac{xy}{vb} = \frac{bq^2 \times b(q+1)}{b^2 q(q+1)} = q$$

olup meseleye muvafıktır.

Lakin hususî olarak (Planude)'ün hallini bulmak için şöyle yapmalıdır:

$$b = q - 1$$

farz edilerek mahallerine konsa,

$$v = q(q^2 - 1), \qquad b = q - 1, \qquad x = q^2(q - 1),$$
$$y = q^2 - 1$$

münasebetleri elde edilir ki, bunlar da (Planude) hallinin aynıdır.

2^0. İki mütevâzi'l-mustatîlâttan birinin kaidesinin arzı ile tûlü mütenâzıran x, y ve irtifaı da: z ile, diğer mütevâzi'l-mustatîlâtın kaidesi olan mustatîlin de arzı ile tûlü w, h ve irtifaı da k ile ve hacimleri beynindeki nispet de (q) ile gösterilse, ber-mûcib-i faraziye

$$x + y + z = w + h + k \quad \ldots (1)$$

$$\frac{xyz}{whk} = q \quad \ldots (2)$$

Yahut:

$$xyz = q.whk$$

muâdeleleri tahaddüs eder. Bunların halli için, şöylece hareket etmelidir:

v, b, c, d dört aded-i tâmmı $\frac{xyz}{whk}$ ifâde-i kesriyyesinde öyle tanzim etmeli ki, bu ifâde-i kesriyyenin kıymeti q adedine müsâvî olsun.

Bu pek çok muhtelif tarzda tertip olunabilirse de, biz burada bir tanesini irâe edeceğiz:

$$\left.\begin{array}{lll} x = vb, & y = c, & z = dq \\ w = vc, & h = b, & k = d \end{array}\right\} \quad (3)$$

Bunların müsâvîlerini (1) rakamlı muâdelede yerlerine vaz‘ edelim ve bunlar meyanında, (c) adedini halledelim:

$$vb + c + qd = vc + b + d$$

$$c = b + \frac{d(q-1)}{v-1} \quad \text{...} (4)$$

olur.

Yukarıki kemmiyyâtı hep a’dâd-ı tâmme olarak aldık; şimdi de u kemmiyyeti bir aded-i tâm farz edilerek, $d = u(v-1)$ münasebeti tasavvur olunarak (4) düsturunda yerlerine konursa,

$$c = b + u(q-1)$$

münasebeti elde edilir ki, mesele a’dâd-ı tâmme olarak halledilmiş olur.

Şimdi, bulmuş olduğumuz düsturları hülâsaten buraya yazalım:

$$x = vb, \qquad w = v[b + u(q-1)],$$
$$y = b + u(q-1), \qquad h = b,$$
$$z = qu(v-1), \qquad k = u(v-1)$$

Misal: Bulduğumuz düsturla bir tatbik yapalım:

$$v = 2, \qquad b = 5, \qquad u = 7, \qquad q = 10$$

$$x = 2 \times 5 = 10$$

$$w = 2 \times 68 = 136$$

$$y = 5 + 7 \times 9 = 68$$

$$h = 5$$

$$z = 10 \times 7 \times 1 = 70$$

$$k = 7 \times 1 = 7$$

Birincinin adlâ‘ı mecmûu $= 10 + 68 + 70 = 148$

İkincinin adlâ‘ı mecmûu $= 136 + 5 + 7 = 148$

Hacimleri beynindeki nispet:

$$\frac{xyz}{whk} = \frac{10 \times 68 \times 70}{136 \times 5 \times 7} = 10$$

Tembih: Planude meseleleri namıyla ma‘ruf olan bu iki mesele, muhtelif ve müteaddit tarzlarda halledilebilirse de biz en basitini derç etmekle iktifa ettik.

Sual: Mükâ'ablarının rakamları mecmûu, kendilerine müsâvî olan adedler hangileridir ve bunlar kaç tanedir?

Sualin Halli:

Aranılan adedlerden birini y ile irâe edelim. Bu adedin de n kadar rakamı olduğunu farz eyleyelim. Bu takdirce,

$$10^{n-1} \leq y < 10^{n}$$

gayr-i müsâvâtı tahaddüs eder.

İmdi, şu gayr-i müsâvâttan anlaşılır ki, y adedinin mükâ'abı, 10^{3n}'den asgardır. Bu hâlde, bu mükâ'abın rakamları $3n$'den azdır. Binaenaleyh, bu rakamların mecmûu $3n \times 9 = 27n$'den asgardır. Yani $y < 27n$'dir.

Lakin yukarda, $y \geq 10^{n-1}$ münasebeti mevcuttu, bununla son gayr-i müsâvâtı birleştirelim.

$$10^{n-1} \leq y < 27n$$

gayr-i müsâvâtı tahaddüs eder.

Bu münasebat muhakeme edilirse, görülür ki, n adedi 2 adedini geçemez, çünkü eğer $n = 3$ olsa, yukarıki münasebat

$$10^{2} \leq y < 81$$

olur ki, abestir.

Zîrâ, y adedi 100 adedine müsâvî veya ondan a'zam, fakat 81 adedinden asgardır ki muhâlif-i hakîkattir. Bu hâlde, y adedi: $2 \times 27 = 54$ adedinden asgardır.

Bundan başka, her mükâ'abın $9m$ veya $9m \pm 1$ şekillerinden birinde bulunduğu, her âdî ilm-i a'dâd kitaplarında ispat edilmiştir.

Bu takdirce, y adedi 54'ten asgar olup $9m$ veya $9m \pm 1$ şeklindeki silsile-i a'dâd meyanındadır. Bu adedler ise şunlardır:

$9m - 1$ şeklindeki a'dâd: $1, 8, 17, 26, 35, 44$

$9m$ şeklindeki a'dâd: $9, 18, 27, 36, 45$

$9m + 1$ şeklindeki a'dâd: $10, 19, 28, 37, 46$

İşte, bu adedler ayrı ayrı tecrübe edilirse, meseleye tevafuk eden adedlerin şunlardan ibaret olduğu görülür: $1, 17, 18, 26, 27$

Mesela bunlardan 8 adedini alalım. Bunun mükâ'abı: 512'dir. Bu adedin rakamları mecmûu ise: $2 + 1 + 5 = 8$'dir ki meseleye muvafıktır. Sairleri de böylece tecrübe olunarak meseleye tevafuk eden adedlerin altı taneden ibaret olduğu görülür.

Sual: İki aded bulmak matlûbdur ki, bunların beynlerindeki fazl, malum olan bir (p) aded-i aslîsine müsâvî olsun ve bu iki adedin hâsıl-ı darbları murabba'-ı tâm olsun?

Sualin Halli:

Bulunması matlûb olan adedin küçüğü d ile irâe olunsa, büyüğü $(p + d)$ olur. Ber-mûcib-i suâl:

$$d(p + d) = m^2$$

münasebeti hâsıl olur.

Bu müsâvâtın her iki tarafı 4 adediyle darb edilse:

$$4d(p + d) = 4m^2$$

olur.

Lakin bu müsâvâtın sol tarafı şöylece de yazılabilir:

$$4d(p+d) = (2d+p)^2 - p^2$$

Bu hâlde,

$$4m^2 = (2d+p)^2 - p^2$$

olup, bundan da:

$$p^2 = (2d+p)^2 - 4m^2 = (2d+p+2m)(2d+p-2m)$$

istihraç olunur.

Lakin p adedi aslî olduğundan p^2 adedinin yalnız p^2 ile 1'den başka madrûbları yoktur. Bu sebepten:

$$2d+p-2m = 1 \quad ve \quad 2d+p+2m = p^2$$

Yahut:

$$2d+2m = p^2 - p, \qquad 2d-2m = 1-p$$

münasebetleri elde edilir. Bunlardan da d ile m için, şu münasebetler istihsal olunur:

$$d = (\frac{p-1}{2})^2 \quad ...(1)$$

$$m = \frac{p^2-1}{4} \quad ...(2)$$

Şimdi, $(p+d)$ adedini bulmak için (1) ile irâe olunan münasebetin her iki tarafına bir (p) ilavesiyle ıslah edilirse

$$d = (\frac{p-1}{2})^2, \qquad p+d = (\frac{p+1}{2})^2$$

ifadeleri elde edilmiş olur.

Sual: Bir aded-i tâm bulmak matlûbdur. Şöyle ki, adedin murabba'ı bir mükâ'ab ile bir murabba' mecmûuna müsâvî olsun? Yani,

$$x^2 = y^2 + z^3$$

muâdele-i gayr-i muayyenesinin a'dâd-ı tâmme üzere halli matlûbdur.

Sualin Halli:

Bu muâdele şöylece de yazılabilir:

$$(x+y)(x-y) = z^3$$

İmdi, iki madrûbdan ibaret bir hâsıl-ı darbın mükâ'ab-ı tâm olması, bu iki madrûbun beherinde dâhil aynı madrûbların üsleri mecmûunun, ya 3 adedine veya bunun herhangi bir misline müsâvî olmasına vabestedir; bu hâlde, şu aşağıdaki müsâvât hakikate mutabıktır:

$$x + y = dh^2k^3, \qquad x - y = d^2hc^3$$

Bunlardan şu münasebetler tevellüd eder:

$$x = \frac{dh(hk^3 + dc^3)}{2}, \qquad y = \frac{dh(hk^3 - dc^3)}{2}, \qquad z = dhkc$$

Bu düsturların a'dâd-ı tâmme vermeleri için, d, h adedlerinden, hiç olmazsa birinin çift olarak alınması icap eder.

Bu muâdele, şu aşağıdaki vech ile de halledilebilir:

$$(x+y)(x-y) = z^3$$

$$x + y = r^3, \qquad x - y = k^3, \qquad z = rk$$

Bunlardan:

$$x = \frac{r^3 + k^3}{2}, \qquad y = \frac{r^3 - k^3}{2}, \qquad z = rk$$

istihsal olunur. Burada da x, y gayr-i muayyenlerinin a'dâd-ı tâmme ahz eylemeleri için, r ve k adedleri bir cinsten olmalıdır. Yani ya ikisi de zevc veya her ikisi de ferd olmalıdır.

***

Sual: Defaten hem murabba'î hem de müsellesî adedleri bulmak matlûbdur?

İhtar: Meselenin halline başlamazdan evvel şurasını beyan edelim ki, aded-i müsellesî, iki aded-i müteâkıbın hâsıl-ı darbının nısfıdır. Bunların en basit şekilleri şunlardır:

$$\frac{n.(n \pm 1)}{2}$$

Lakin bazı mesailin sühûletle halleri için bunlardan başka türlü şekillerde de aded-i müsellesîler alınabilirler. El verir ki, şekil, daima iki aded-i müteakip hâsıl-ı darbının nısfını göstermiş olsun. Mesela, icabında:

$$\frac{n^3(n^3 \pm 1)}{2} \quad veyahut \quad \frac{2n^2(n^2 \pm 1)}{2}$$

şekilleri de a'dâd-ı müsellesiyenin şekilleri diye alınabilirler. Gelelim, şimdi, meselenin halline:

Meselenin kolaylıkla halli için şu:

$$\frac{2n^2(n^2 \pm 1)}{2} = n^2(2n^2 \pm 1)$$

şeklini intihap etmek münasiptir. Öyle ise, ber-mûcib-i mes'ele:

$$n^2(2n^2 \pm 1) = y^2$$

muâdelesinin halli matlûbdur. y^2 müsâvîsi olan

$$n^2(2n^2 \pm 1) \quad \dots (k)$$

ifadesinde birinci n^2 haddi murabba'-ı tâmdır. Bu hâlde,

$$2n^2 \pm 1 = z^2 \quad \dots (q)$$

almak kâfidir.

Evvel-emirde şu:

$$2n^2 + 1 = z^2$$

şeklini alalım. Bu muâdele şöylece de yazılabilir:

$$z^2 - 2n^2 = 1 \quad \dots (h)$$

Bu şekildeki muâdeleye (Pell muâdelesi) derler ki, hesâb-ı a'lâda büyük rol oynar.

Bu muâdeleyi (Gauss)'un (Forme)leri ile halledeceğiz ki o da şöyledir:

n^2 kemmiyyetinin emsali olan 2 adedine en yakın murabba' 1'dir. Bu hâlde şekil şudur:

$$(1 \quad 1 \quad -1)$$

Şimdi bu şekli, kendinin aynı zuhur edinceye kadar, usul-i ma'lûmesi üzere yürütelim:

$$(1 \quad 1 \quad -1) \quad (-1 \quad 1 \quad 1) \quad (1 \quad 1 \quad -1)$$

Bu şekiller, kavâid-i ma'lûmesi üzere halledildikte:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \quad \dots (q)$$

ibdâli vücuda gelir. Bu hâlde, ibdâldeki adedler çaprazlama alındığı takdirde

$$z = \frac{-1-5}{2} = -3$$

$$n = -2$$

kıymetleri zuhur eder ki, bunlar, (h) muâdelesine tevafuk eden adedlerdir. Çünkü,

$$(-3)^2 - 2 \times (-2)^2 = 1$$

olur.

Muâdelemizin kuvvetleri zevc olduğundan, bu adedler müsbet olarak da alınabilir.

$$3^2 - 2 \times 2^2 = 1 \quad \dots (g)$$

Bu muâdele şöylece de yazılabilir:

$$3^2 - 2.2^2 = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 1$$

Bundan:

$$\begin{cases} \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2 = 1 \quad yahut \\ \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

olup birinciden

$$9 + 12\sqrt{2} + 8 = 17 + 12\sqrt{2} = 1$$

ikinciden de

$$9 - 12\sqrt{2} + 8 = 17 - 12\sqrt{2} = 1$$

olup bunlar yekdiğeriyle darb edilse:

$$17^2 - 2 \times 12^2 = 1$$

olup

$$\begin{cases} z = 17 \\ n = 12 \end{cases}$$

kıymetleri de ayrıca bulunmuş olur. (h) muâdele-i gayr-i muayyenesinin sair cezrleri de şu silsile-i ric‘iyye ile bulunur:

$$T_{n+1} = 6T_n - T_{n-1} \quad \ldots (m)$$

Burada (T), (hadd)i ima eder. (6) ise, (q) ibdâlinde çaprazlama alınan

$$-1 - 5 = -6$$

(6) mecmûudur. Şimdi, yukardaki bulduğumuz z ile n kemmiyyetlerinin ikişer cezrlerini yazıp, diğerlerini de (m) silsilesine tatbiken tayin edelim:

$$z = 3, 17$$

$$n = 2, 12$$

$$z = kemmiyyetinin \text{ üçüncü } haddi = 6.17 - 3 = 99$$

$$n = kemmiyyetinin \text{ üçüncü } haddi = 6.12 - 2 = 70$$

$$z = kemmiyyetinin\ d\ddot{o}rd\ddot{u}nc\ddot{u}\ haddi = 6.99 - 17 = 577$$

$$n = kemmiyyetinin\ d\ddot{o}rd\ddot{u}nc\ddot{u}\ haddi = 6.70 - 12 = 408$$

Bu minval üzere devam olunarak z ve n için şu layık kıymetler bulunmuş olur:

$$z = 3, 17, 99, 577 \ldots$$

$$n = 2, 12, 70, 408 \ldots$$

Şimdi, (n)'nin yukarıki kıymetleri tayin edildikten sonra, (k) ifadesinde bu kıymetler birer birer n mahalline vaz‘ edilirse, şu:

$$36, 41616, 48024900, \ldots ilh$$

adedleri bulunur ki, bunlar hem murabba'î hem de müsellesî olan adedlerdir. Bu adedler arasında daha bu cins adedler mevcuttur. Bunlar da (k) ifadesinde $(-)$ işaretini alarak husûle gelen

$$2n^2 - 1 = y^2$$

muâdelesini hallederek elde edilirler.

İhtar: Biz burada, kariîn-i kirâmın a‘dâd-ı müsellesiyyenin başlıca havâssına vakıf olduklarını farz ediyoruz. Bunun için, bir aded-i müsellesînin kaidesinin nasıl istihraç edildiğinden bahsetmiyoruz.

Pek basit ve âdî bir usul ile de defaten murabba'î ve müsellesî adedler bulunabilir. İşte şöyle:

Birinci Hatt-ı Şakûl	İkinci Hatt-ı Şakûl
1	1
3	2
7	5
17	12
41	29
99	70
239	169
577	408
1393	935
…	…
…	…

Bu cetvelin, iyice nazar-ı dikkatten geçirilirse sûret-i tertîbi gerçi kolaylıkla anlaşılırsa da biraz tarif etmeyi münasip addeyledik:

Evvelce, iki vâhid bir hatt-ı ufkî üzerine yazılır. Sonra bu vâhidler cem‘ edilir:

$$1 + 1 = 2$$

Bu aded ikinci şâkuldeki vâhidin altına yazılır. Bundan sonra ikinci şâkulden

$$1 + 2 = 3$$

bulunur, birinci şâkule yazılır. Sonra,

$$3 + 2 = 5 \;\; ve \;\; 5 + 2 = 7 \;\; ve \;\; \ldots ilh$$

Bu minval üzere devam edilerek cedvel-i mezkûr tertip edilmiş olur. Bir cetvel bu minval üzere devam olunarak nâ-mütenâhî bir surette tertip olunabilir.

Bu cetvelden, matlûb olan adedleri, yani defaten hem murabba'î hem de müsellesî adedleri bulmak için şöylece hareket etmelidir:

$$2 \; ve \; 3 \; için \left.\begin{matrix} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \end{matrix}\right\} 4 \times 9$$
$$= 36 \;\; hem \; murabba\hat{\imath} \; hem \; de \; m\ddot{u}selles\hat{\imath}$$

$$5 \; ve \; 7 \; için \left.\begin{matrix} 5 \times 5 = 25 \\ 7 \times 7 = 49 \end{matrix}\right\} 25 \times 49$$
$$= 1225 \;\; hem \; murabba\hat{\imath} \; hem \; de \; m\ddot{u}selles\hat{\imath}$$

$$12 \; ve \; 17 \; için \left.\begin{matrix} 12 \times 12 = 144 \\ 17 \times 17 = 289 \end{matrix}\right\} 144 \times 289$$
$$= 16416 \;\; hem \; murabba\hat{\imath} \; hem \; de \; m\ddot{u}selles\hat{\imath}$$

$$\ldots ilh$$

İşte bu adedler tetkik edilse bunların hem murabba'î hem de müsellesî oldukları görülür. Murabba'î oldukları meydandadır. Çünkü bunlar, iki murabba' hâsıl-ı darbından ibarettir. Müsellesî olduklarını denemek için ya 8 ile darb ederk hâsıl-ı darba vâhid zam olunarak mecmûun murabba'-ı tâm olduğunu anlamalı veyahut 2 ile darb ederek, hâsıl-ı darbın cezr-i murabba'ı alınmalı; eğer hâsıl-ı cezr ile bâkî yekdiğerinin aynı ise, adedin müsellesî olduğuna kanaat hâsıl olur. Bunun ispatı ise şöyledir:

$\frac{n(n+1)}{2}$ ifadesi a'dâd-ı müsellesiyyenin şekl-i umûmîsidir.

Bunu 8 ile darb edip vâhid de zam edecek olsak,

$$4n^2 + 4n + 1$$

ifadesi hâsıl olur ki, bunun da $(2n + 1)^2$ murabba'-ı tâmmından ibaret olduğu görülür.

Yahut yukarıki şekli 2 ile darb edip cezr-i murabba'ını alalım:

$(n^2 + n)$ bunun cezr-i murabba'ı n'dir. Bâkî de yine n'dir. Öyle ise bir aded 2 ile darb edilip de cezr-i murabba'ı alınırsa hâsıl-ı cezr ile bâkî, yekdiğerinin aynı ise bu aded müsellesîdir.

Sual: İki aded-i tâm bulmak matlûbdur ki, bu iki adedin mecmûu, hâsıl-ı darbına müsâvî olsun?

Sualin Halli:

O iki adedi b ve c ile gösterelim:

Ber-mûcib-i suâl:

$$b + c = b.c$$

müsâvâtı hâsıl olur. Bundan:

$$b = \frac{c}{c-1} = 1 + \frac{1}{c-1}$$

olur.

Lakin b adedinin tam olması matlûb olduğundan $\frac{1}{c-1}$ kesrinin bir aded-i tâm vermesi şarttır. Bu ise ancak

$$c - 1 = 1$$

münasebetiyle meşruttur. Bu sebepten:

$$b = 2 \quad ve \quad c = 2$$

olur ki, yalnız 2 adedi bu suale muvafıktır.

Sual: n kadar haddi olan bir silsile-i a‘dâd-ı tabîiyyenin her iki haddi hâsıl-ı darblarının dı‘fları mecmûunu bulmak matlûbdur?

Malumdur ki, n kadar silsile-i a‘dâd-ı tabîiyye şu silsiledir:

$$1, 2, 3, 4, \dots, n$$

Bunların ikişer ikişer hâsıl-ı darblarının dı‘fları mecmûu da:

$$2(1 \times 2) + 2(1 \times 3) + 2(1 \times 4) + \cdots + 2(1 \times n) + 2(2 \times 3) + 2(2 \times 4) + 2(2 \times 5) + \cdots + 2(2n) + \cdots + 2(n-1) \times n$$

dir.

Sualin Suret-i Halli:

Bu mecmûu (S) ile gösterelim.

Ve evvel-emirde şu müsâvâtı nazar-ı dikkate alalım:

$$(1+2+3+\cdots+n)^2$$
$$= 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+2(1\times 2)+2(1\times 3)$$
$$+2(1\times 4)+\cdots+2(2\times n)+2(2\times 3)$$
$$+2(2\times 4)+2(2\times 5)+\cdots+2(2n)+\cdots$$
$$+2(n-1)n$$

Bundan şu müsâvât elde edilir:

$$S=(1+2+3+\cdots+n)^2-(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$

Lakin,

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Ve

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

dır. Bu sebepten:

$$S=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

olup bundan da:

$$S=\frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{12}$$

olur ki, işte bu düstur vasıtasıyla (S) mecmûu hesâb edilir.

Misal: n adedini 5 farz etmiş olsak, $1,2,3,4,5$ silsilesinin her iki haddi hâsıl-ı darbının dı‘fı mecmûu şudur:

$$2(1\times 2)+2(1\times 3)+2(1\times 4)+2(1\times 5)+2(2\times 3)$$
$$+2(2\times 4)+2(2\times 5)+2(3\times 4)+2(3\times 5)$$
$$+2(4\times 5)=170$$

Düstura da tatbik edersek:

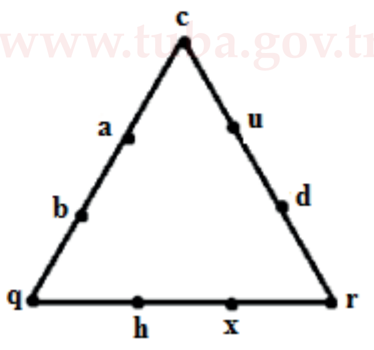
$$\frac{5 \times 6 \times 68}{12} = 170$$

Aynı adedi bulmuş oluruz.

Sual: Bir müsellesin re'sleri ile dıl'ları üzerine, (1)'inci şekilde gösterildiği üzere, ilk dokuz aded-i tâmmı bir vech ile vaz' ve tertip etmek matlûbdur ki, beher dıl'ı üzerine mevzu dört aded-i tâmmın murabba'ları mecmûu, sabit bir miktara yani yekdiğerine müsâvî olsun.

Meselenin Halli:

Bir müsellesin çevresi üzerine mevzu ve yukarıki şartlara tevafuk eden (1)'den (9) adedine kadar (9 da dâhil) a'dâd-ı tâmmeyi: $q, b, a, c, u, d, r, x, h$ harfleriyle irâe edersek, ber-mûcib-i mes'ele, şu münasebât husûle gelir:



$$q^2 + b^2 + a^2 + c^2 = c^2 + u^2 + d^2 + r^2 = r^2 + x^2 + h^2 + q^2$$

Yahut meçhul olan mecmûu-ı sâbiti (S) ile göstermiş olsak:

$$\left.\begin{aligned} q^2 + b^2 + a^2 + c^2 = S \\ c^2 + u^2 + d^2 + r^2 = S \\ r^2 + x^2 + h^2 + q^2 = S \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

münasebetleri tahaddüs eder.

Bu üç müsâvâtı taraf tarafa cem‘ etsek:

$$q^2 + r^2 + c^2(q^2 + b^2 + a^2 + c^2 + u^2 + d^2 + r^2 + x^2 + h^2) \\ = 3S$$

münasebetleri elde edilir.

İmdi, parantez dâhilindeki mecmû’ sırasına riayet olunmayan (1)’den 9 tane a‘dâd-ı tâmmenin murabba’ları mecmûuna müsâvîdir. Düstur-ı mahsûsuna tatbiken:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 = \frac{9.(9+1).(2.9+1)}{6} = 285$$

olduğundan:

$$q^2 + c^2 + r^2 = 3S - 285 = 3(S - 95)$$

olur.

Bundan istintaç olunur ki, müsellesin üç re’sine mevzû’ üç adedin murabba’ları mecmûu 3 adediyle kâbil-i taksîmdir. Binaenaleyh, bu murabba’ların şu: $misl\,3, misl\,3 \pm 1$ şeklinde olmaları lazımdır. Öyle ise, q, c, r adedleri üzerine yalnız şu üç faraziye yürütülebilir:

$$\left.\begin{aligned} q = 3, \quad & c = 6, \quad & r = 9 \\ q = 1, \quad & c = 4, \quad & r = 7 \\ q = 2, \quad & c = 5, \quad & r = 8 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Birinci faraziye şâyân-ı kabûl değildir. Çünkü bundan şu münasebet husûle gelir:

$$q^2 + c^2 + r^2 = 126 = 3(S - 95)$$

Bundan:

$$S = 137$$

elde edilir.

(1) rakamlı münasebâtın birincisine bunu tatbik edecek olursak:

$$b^2 + a^2 = S - (q^2 + c^2) = 92$$

olur. Yahut bu müsâvât şöylece de yazılabilir:

$$(b + a)^2 = 92 + 2ba$$

Yahut,

$$(b + a) \equiv 0 \quad (muaddil\ 2)$$

olur.

Bundan anlaşılır ki, $(a + b)$ mecmûu çifttir. Bu hâlde b ile a adedleri bir cinsten, yani ya her ikisi de çift veya her ikisi de tektir. İmdi, $2, 4, 8$ a‘dâd-ı zevciyyesi mümkün olabilen her tarzda terkip edilse, her ikisinin murabba'ları mecmûu 92 adedine müsâvî olamaz.

Kezalik, $1, 5, 7$ a‘dâd-ı ferdiyyesi hakkında aynı muamele yapılmış olsa, bunlardan da her ikisinin murabba'ları mecmûunun 92 adedine müsâvî olmadığı tahakkuk etmiş olur.

(2) rakamlı münasebâtın ikinci faraziyesini alsak, bunun şâyân-ı red olduğunu görürüz. Zîrâ,

$$q^2 + c^2 + r^2 = 66 = 3(S - 95)$$

olup, bundan,

$$S = 117$$

olur.

Bunu (1) rakamlı münasebâtın birincisine tatbik edelim:

$$b^2 + a^2 = S - (q^2 + c^2) = 100$$

Yahut

$$(b + a)^2 = 100 + 2ba$$

Veyahut

$$(b + a)^2 \equiv 0 \quad (muaddil\ 2)$$

olur.

Burada da b ile a adedlerinin bir cinsten oldukları tebeyyün eder. Gerçi, $3, 5, 7, 9$ a'dâd-ı ferdiyye içinden iki tanesinin murabba'ları mecmûu 100 adedine müsâvî değilse de, $2, 6, 8$ a'dâd-ı zevciyye meyanında, 8 ile 6 adedlerinin murabba'ları mecmûu:

$$64 + 36 = 100$$

ettiğinden,

$$b^2 + a^2 = 8^2 + 6^2$$

olup, bundan,

$$b = 8, \qquad a = 6$$

yahut,

$$b = 6, \qquad a = 8$$

olarak alınabilir.

Lakin (1) rakamlı münasebâtın ikincisine bu aded tatbik olunursa,

$$c^2 + u^2 + d^2 + r^2 = S^2$$

Yahut

$$4^2 + u^2 + d^2 + 7^2 = 117$$

Yahut

$$u^2 + d^2 = 117 - 65 = 52$$

olur. Lakin,

$$u^2 + d^2 = 4^2 + 6^2$$

olup bundan

$$u = 4, \qquad d = 6$$

Yahut,

$$u = 6, \qquad d = 4$$

olur ki, burada u veya d adedlerinden birinin 4 adedine müsâvî olması icap eder ki, (2) rakamlı faraziyatın ikinci faraziyesinde $c = 4$ olduğundan bu faraziyenin de şâyân-ı red olduğu tahakkuk etmiş olur.

Şimdi, (2) rakamlı münasebatın üçüncü faraziyesi kaldı; onu da alalım:

$$q = 2, \qquad c = 5, \qquad r = 8$$

Bundan:

$$q^2 + c^2 + r^2 = 93 = 3(S - 95)$$

Yahut

$$q^2 + c^2 + r^2 = 93 = 3S - 285$$

olup bundan da

$$S = 126$$

bulunur.

Bunu (1) rakamlı münasebâtın birincisine tatbik edelim:

$$b^2 + a^2 = S - (q^2 + c^2) = 126 - 29 = 97$$

olup, bu 97 adedi, hem aslî hem de $4n + 1$ şeklinde olduğundan iki murabba' mecmûuna müsâvîdir. Yani:

$$b^2 + a^2 = 9^2 + 4^2$$

dir.

Şimdi, (1) rakamlı münasebâtın 2'nci müsâvâtından:

$$c^2 + u^2 + d^2 + r^2 = 25 + u^2 + d^2 + 64 = 126$$

Yahut

$$u^2 + d^2 = 126 - 89 = 37$$

olup, bundan

$$u^2 + d^2 = 6^2 + 1^2$$

Yahut

$$u = 6, \qquad d = 1$$

Veyahut

$$u = 1, \qquad d = 6$$

olur. (1) rakamlının üçüncü müsâvâtından da:

$$r^2 + x^2 + h^2 + q^2 = 126$$

Yahut

$$64 + x^2 + h^2 + 4 = 126$$

Yahut

$$x^2 + h^2 = 126 - 68 = 58$$

Bundan da:

$$x^2 + h^2 = 7^2 + 3^2$$

Yahut

$$x = 7, \qquad h = 3$$

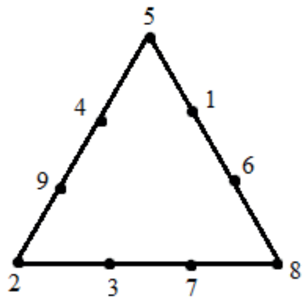
Şimdi, yukardan beri bulmuş olduğumuz müsâvâtlardan hülâsa ederek lüzumlu olanları alalım:

$$\left.\begin{aligned} b^2 + a^2 &= 97 = 9^2 + 4^2 \\ u^2 + d^2 &= 37 = 1^2 + 6^2 \\ x^2 + h^2 &= 58 = 7^2 + 3^2 \end{aligned}\right\} \quad (q)$$

(2) rakamlı münasebâtın 3'üncü faraziyesiyle şu (q) münasebâtından şunlar elde edilir:

$$q = 2, \quad c = 5, \quad r = 8, \quad b = 9, \quad a = 4, \quad u = 1,$$
$$d = 6, \quad x = 7, \quad h = 3$$

Bulmuş olduğumuz şu münasebâtı müsellese tatbik edecek olursak şekilde görülen manzume vücuda gelmiş olur ki, meselemize tamamen muvafıktır.



Çünkü,

$$5^2 + 1^2 + 6^2 + 8^2 = 8^2 + 7^2 + 3^2 + 2^2 = 2^2 + 9^2 + 4^2 + 5^2 = 126$$

dır.

Tembih: Dikkat edilirse bu müselleste şöyle bir hassa daha tezahür eder. Şudur: Dıl‘lara mevzu adedler mecmûu da sabittir: 20 adedine müsâvîdir:

$$5 + 1 + 6 + 8 = 8 + 7 + 3 + 2 = 2 + 9 + 4 + 5 = 20$$

Şunu da ihtar edelim ki, (q) münasebâtında

$$a = 4, \qquad b = 9, \qquad d = 6, \qquad u = 1 \quad \ldots ilh$$

alındığı gibi bunlar aynı dıl‘ üzeinde bulunduklarından mübadele edilerek şöylece de:

$$a = 9, \qquad b = 4, \qquad d = 1, \qquad u = 6 \quad \ldots ilh$$

alınabilir.

Mesele: Müsbet n aded-i tâmmı müstakil olmak, yani istenilen aded-i tâmmı irâe etmek şartıyla âtîdeki müteâdilin halli ve buna dair misaller ibraz edilmesi mümkün müdür?

$$a^{\alpha n+\beta} + b^{\alpha' n+\beta'} + c^{\alpha'' n+\beta''} + d^{\alpha''' n+\beta'''} \equiv 0 \qquad (muaddil\ p)$$

Burada a, b, c, d, p adedleri muhtelif a'dâd-ı asliyyeden olup (p) adedi hepsinden a'zamdır. (α) adedleri müsbettir ve hiçbiri de sıfır değildir. (β) adedleri ise a'dâd-ı tâmmeden olup, müsbet, ya menfi veyahut da sıfır olabilirler. Şimdi bu müteâdili ikişer ikişer teâdül etmemek şartıyla halletmek matlûbdur, yani şu:

$$a^{\alpha n+\beta} + b^{\alpha' n+\beta'} \equiv 0 \quad ve \quad c^{\alpha'' n+\beta''} + d^{\alpha''' n+\beta'''} \equiv 0 \quad (muaddil\, p)$$

tarzda ikiye bölünmemek şarttır.

Hall-i Mes'ele:

Bulunması matlûb olan adedlerin bir tanesi için verilecek usul ve kaide hepsi için de aynıdır. Bunun için biz, burada yalnız bir tanesi için lazım olan kaideyi verecek, meselenin hallini hülâsaten yazacağız:

Evvel-emirde aslî ve diğer adedlerden a'zam olması iktiza eden adedi tayin edelim. Mesela, o aded (41) olsun. Şimdi bu (41) adedi (muaddil – modül) olarak alınırsa, diğer adedler bundan küçük ve aslî olarak alınmalıdır. Mesela birinci a adedi 2 olsun; bunu şöylece:

$$2^{\alpha n+\beta} = \left(2^{\alpha n} . 2^{\beta}\right) \quad \ldots (k)$$

tarzında yazabiliriz.

Şimdi modül (41) olduğuna göre, herhangi bir aded-i aslî ve mesela 2 aslîsi, bu (41) adedinden vâhid noksanı, yani $41 - 1 = 40$ adedinin kâsımları olan: $2, 4, 5, 8, 10, 20, 40$ kuvvetlerine ref' edilirse, bunların behemehâl birinde (1) bakiyesini verir. Bu hâlde:

$$2^{\alpha} \equiv 1$$

olunca,

$$(2^{\alpha} \equiv 1)^{n} \equiv 1 \quad (muaddil\ 41)$$

olur. İşte n adedinin istiklâliyeti bundan ileri geliyor.

Burada, yani hangi kuvvet vâhidi husûle getiriyorsa, orada (n)'nin kıymeti tezahür eder. Bundan sonra, b, d, c adedleri için modül 41'den küçük aslî adedler intihap olunur. Farz edelim ki onlar da mütenâzıran: $3, 7, 11$ adedleri olsun.

Bu hâlde sorulan müteâdil şu hâle girmiş olur:

$$2^{\alpha n+\beta} + 3^{\alpha' n+\beta'} + 7^{\alpha'' n+\beta''} + 11^{\alpha''' n+\beta'''} \equiv 0 \quad (mod\text{ü}l\ 41)$$

Şimdi, burada n müstakil olduğundan onu geçelim, yalnız burada: (α)'ların (β)'ların kıymetlerini bulacağız, yukarıki müteâdil şu şekle de girebilir:

$$(2^{\alpha})^{n}.2^{\beta} + (3^{\alpha'})^{n}.3^{\beta'} + (7^{\alpha''})^{n}.7^{\beta''} + (11^{\alpha'''})^{n}.11^{\beta'''}$$
$$\equiv 0 \quad (mod\text{ü}l\ 41) \quad \dots (H)$$

Şimdi, $2^{\alpha}, 3^{\alpha'}, 7^{\alpha''}, 11^{\alpha'''}$ kuvvetlerinde, bunları vâhide müsâvî kılacak olan $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ üslerinin kıymetlerini tayin edelim. Bunlardan yalnız bir tanesi hakkında muamele yapacağız. Diğerleri de aynı usule tâbidir. Bir kere $(muaddil - mod\text{ü}l\ 41)$'in, kolaylık elde etmek için, (9) adedine kadar misillerini şöylece yazalım:

Modülün şu misilleri hizasına da (2)'nin kuvvetlerini – modülü geçtikçe, modülden aşağı indirilecek muamele yaparak – yazalım:

$$1 - 41$$

$$2 - 82$$

$$3 - 123$$

$$4 - 164$$

$$5 - 205$$

$6 - 246$

$7 - 287$

$8 - 328$

$9 - 369$

$1^0 \ \ 2$

$2^0 \ \ 4$

$3^0 \ \ 8$

$4^0 \ \ 16$

$5^0 \ \ 32$

$6^0 \ \ 23$

$7^0 \ \ 5$

$8^0 \ \ 10$

$9^0 \ \ 20$

$10^0 \ \ 40 = -1$

$11^0 \ \ 39$

$12^0 \ \ 37$

$13^0 \ \ 33$

$14^0 \ \ 25$

$15^0 \ \ 95$

$16^0 \ \ 18$

$17^0 \ \ 36$

$18^0 \ \ 31$

$19^0 \ \ 21$

$20^0 \ \ 1$

Burada görülüyor ki, (2)'nin 20'nci kuvveti (1) vâhide müsâvîdir. Öyle ise,

$$(2^{20}) \equiv 1$$

olup

$$(2^{20})^n \equiv 1$$

olur.

İşte, $3^{\alpha'}, 7^{\alpha''}, 11^{\alpha'''}$ kuvvetleri hakkında da aynı muamele icra edilirse şu netaic elde edilir:

$$a = 2 \qquad \alpha = 20 \equiv 1$$

$$b = 3 \qquad \alpha' = 8 \equiv 1$$

$$c = 7 \qquad \alpha'' = 40 \equiv 1$$

$$d = 11 \qquad \alpha''' = 40 \equiv 1$$

Eğer, yukarıki (H) müteâdiline dikkatle nazar olunursa görülür ki, hesâb edilecek yalnız $2^{\beta}, 3^{\beta'}, 7^{\beta''}, 11^{\beta'''}$ kuvvetleri kalmıştır.

Çünkü bunlara madrûb olan kuvvetler vâhide müsâvî olduğundan darbda tesirleri yoktur.

Öyle ise biz şu: $2^{\beta}, 3^{\beta'}, 7^{\beta''}, 11^{\beta'''}$ kuvvetlerini hesâb edip bunlardan asıl müteâdili husûle getirecek adedleri intihap edelim. İşte ben şu neticeye vasıl oldum. Fakat bu gayr-i muayyen olduğundan daha pek çok haller bulunabilir:

$$2^{\beta} \equiv 2^{19} \equiv 21$$

$$3^{\beta'} \equiv 3^2 \equiv 9$$

$$7^{\beta''} \equiv 7^2 \equiv 8$$

$$11^{\beta'''} \equiv 11^{5} \equiv 3$$

$$\overline{\quad 41 \quad}$$

Görülüyor ki, bunlardan ikişer ikişer alınarak bir müteâdil teşkili de gayr-i mümkündür. Bu sebepten matlûb olan mesele halledilmiştir. Bu takdirce asıl müteâdil, yukarıkı halle göre şu şekle girmiştir:

$$2^{20n+19} + 3^{8n+2} + 7^{40n+2} + 11^{40n+5} \equiv 0 \qquad (muaddil\ 41)$$

Hâmiş: Bu sual, (1897) senesinde Boutin imzasıyla, Paris'te intişar eden mâhî (L'Intermédiaire des Mathématiciens) riyazî mecmuasına derç edilmişti. Dokuz sene kimse tarafından halli görülemediğinden 1906 senesinde yine o risalede tekrar tab' edildi. Yine kimse halline muvaffak olamadı. Nihayet 1908 senesinde benim nazar-ı dikkatimi celbetti. Uğraşmaya başladım; nihayet o senenin yani 1908 senesinin, neşredilen onuncu nüshasında: (Mehmet Nadir) imzasıyla halli görüldü.

Pell Muâdele-i Meşhûresinin Sûret-i Umûmiyyede Halli

Erbabı bilir ki, (Pell) meselesinin gayesi, şu aşağıdaki muâdeleyi a'dâd-ı tâmme üzere hâlletmektir:

$$2x^2 = y^2 + z^2$$

Hâlbuki, bu muâdeleyi, hususi olarak hâvî olan muâdele, şudur:

$$nx^2 = y_1{}^2 + y_2{}^2 + y_3{}^2 + \cdots + y_n{}^2 \ldots (1)$$

Burada görülüyor ki, n adedi, sağ taraftaki haddlerin emsalleri mecmûuna müsâvîdir. Bunu nazar-ı dikkate alarak şu ayniyet yazılabilir:

$$(x-y_1)^2+(x-y_2)^2+\cdots+(x-y_n)^2 \equiv nx^2+\sum y_1{}^2-2x\sum y_1 \ldots (2)$$

(1) muâdelesi:

$$nx^2=\sum y_1{}^2$$

demek olduğundan (2)'de mahalline vaz' ile:

$$\sum(x-y_1)^2 \equiv nx^2+nx-2x\sum y_1 \equiv 2nx^2-2x\sum y_1 \ldots (3)$$

olur.

Bu ayniyet ıslah edildikte şu:

$$\sum(x-y_1)^2 \equiv 2x(nx-\sum y_1),$$

olup bundan:

$$\sum(x-y_1)^2 \equiv 2x[(x-y_1)+(x-y_2)+\cdots+(x-y_n)] \ldots (4)$$

olur.

$$x-y_1=k_1\,, \qquad x-y_2=k_2\,, \qquad x-y_3=k_3\,, \qquad \ldots \quad x-y_n=k_n$$

Yahut

$$x-k_1=y_1\,, \qquad x-k_2=y_2\,, \qquad x-k_3=y_3\,, \qquad \ldots \quad x-k_n=y_n \quad \ldots (5)$$

olur. Bunlar (4) rakamlı muâdelede mahallerine konsa:

$$k_1{}^2+k_2{}^2+k_3{}^2+\cdots k_n{}^2=2x(k_1+k_2+k_3\ldots+k_n)$$

Burada evvel-emirde şu:

$$k_1+k_2+k_3\ldots+k_n=d$$

halledilir. Bunun vasıtasıyla x gayr-i muayyeni bulunur. (x)'in kıymeti bulunduktan sonra, (5)'de gösterilen münasebetler nazar-ı dikkate alınarak

$$y_1, y_2, \dots y_n$$

gayr-i muayyenleri de istihraç edilmiş olur.

Bu meseleyi daha umumî bir surette halletmek için şu aşağıdaki muâdeleyi halletmek icap eder:

$$nx^2 = b_1{y_1}^2 + b_2{y_2}^2 + b_3{y_3}^2 + \cdots + b_n{y_n}^2 \dots (6)$$

Burada:

$$n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$$

dir.

(6) muâdelesi şu ayniyete tahvil olunabilir:

$$b_1(x - y_1)^2 + b_2(x - y_2)^2 + \cdots + b_n(x - y_n)^2 \equiv x^2\sum b_1 - 2x\sum b_1 y_1 + \sum b_1{y_1}^2$$

Burada

$$x^2\sum b_1 = \sum b_1{y_1}^2$$

olduğundan, mahalline vaz' ile:

$$\sum b_1(x - y_1)^2 = 2x^2\sum b_1 - 2x\sum b_1 y_1$$

olur. Bundan:

$$\sum b_1(x - y_1)^2 = 2x[x(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - (b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_ny_n)]$$

olur.

Burada da yukarda yaptığımız gibi yapalım, yani şöyle:

$$x - y_1 = \gamma_1, \qquad x - y_2 = \gamma_2,$$
$$x - y_3 = \gamma_3 \dots x - y_n = \gamma_n \quad (q)$$

Bu hâlde:

$$\sum b_1 {\gamma_1}^2 = 2x \sum b_1 \gamma_1$$

olur.

Bunu bi'l-inkişâf yazalım:

$$b_1 {\gamma_1}^2 + b_2 {\gamma_2}^2 + \cdots b_n {\gamma_n}^2 = 2x(b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + \cdots + b_n\gamma_n$$

İşte (Pell) muâdelesinin en umumî tarzı böylece halledilmiş oluyor.

Birkaç mesele ile fikirleri tenvir edelim:

$$7x^2 = 5y^2 + 3z^2 - k^2$$

muâdelesi bir (Pell) muâdelesidir. Zîrâ,

$$7 = 5 + 3 - 1 = 7$$

dir.

İşte burada görülüyor ki, birinci meçhulün emsali olan 7 adedi, diğer meçhullerin emsalleri mecmû'-ı cebrîsine müsâvîdir.

Bunun halli şöylecedir:

$$2x(5\gamma_1 + 3\gamma_2 - \gamma_3) = 5{\gamma_1}^2 + 3{\gamma_2}^2 + {\gamma_3}^2 \dots (h)$$

$$5\gamma_1 + 3\gamma_2 - \gamma_3 = 1$$

muâdelesini halledelim. Bunun için burada (γ)'lardan birine münasip bir kıymet verelim:

Ve mesela

$$\gamma_3 = 3$$

olsun, bu hâlde muâdele

$$5\gamma_1 + 3\gamma_2 = 4$$

olur. Bundan,

$$5\gamma_1 = 4 \quad (mod\ddot{u}l\ 3)$$

Veyahut

$$2\gamma_1 + \equiv 4 \quad (muaddil\ 3)$$

Veyahut

$$\gamma_1 \equiv 2$$

olup yukarıki muâdelede mahalline vaz‘ ile:

$$10 + 3\gamma_2 = 4$$

Yahut

$$3\gamma_2 = -6$$

Yahut

$$\gamma_2 = -2$$

olmuş olur.

(γ)'ların bulduğumuz bu müsâvîleri (h) muâdelesinde mahallerine konsa, şu muâdele elde edilir.

$$2x = 5(2)^2 + 3(-2)^2 - 3^2 = 23$$

Bundan,

$$x = \frac{23}{2}$$

olur.

(q) münasebâtını nazar-ı dikkate alarak:

$$y = \frac{23}{2} - 2 = \frac{19}{2},$$

$$z = \frac{23}{2} + 2 = \frac{27}{2},$$

$$k = \frac{23}{2} - 3 = \frac{17}{2}.$$

olmuş olur.

Lakin bu kesirlerin hepsinin mahrecleri yekdiğerine müsâvî olduğundan bunlardan sarf-ı nazar edilebilip muâdelenin a'dâd-ı tâmme olarak halli şu olmuş olur.

$$x = 23,$$

$$y = 19,$$

$$z = 27,$$

$$k = 17,$$

Sual.- Dört rakamlı bir aded var. Murabba'-ı tâmdır. İlk iki rakamları birbirine müsâvî olduğu gibi, son iki rakamı da yine yekdiğerinin aynıdır. Bu adedi bulunuz.

Bu adedi y ile gösterelim ve her iki rakamlarını da: m, u ile irâe edelim. Bu hâlde,

$$y = 1000m + 100m + 10u + u,$$

müsâvâtı hâsıl olur. Bu müsâvât şu hâle ircâ edilir:

$$y = 1100m + 11u = 11(100m + u) \dots (\gamma)$$

Lakin y adedini murabba' farz etmiştik. Bu hâlde,

$$11(100m + u)$$

ifadesinde parantez içinde bulunan ve 11 adedi aslî olduğundan

$$(100m + u)$$

mecmûunun 11 adedinin misli olması zarıridir.

Bu takdirce

$$100m + u \equiv 0 \quad mod\text{ül } 11$$

Yahut

$$m + u \equiv 0 \quad (11)$$

olur.

İmdi m ile u adedleri 10 adedinden küçük olduklarından,

$$m + u = 11$$

olur.

Bundan:

$$u = 11 - m$$

olup (γ) münasebetinde mahalline vaz' olundukta:

$$y = 11(99m + 11)$$

Yahut:

$$y = 11^2(9m + 1)$$

olur.

Şimdi, burada: $(9m + 1)$ ifadesinin murabba'-ı tâm olması zaruri olduğundan, bu mecmûun âhâd hanesi yalnız, $1, 4, 5, 6, 9$ adedlerinden biri olması şarttır. Öyleyse $9m$ hâsıl-ı darbının $0, 3, 4, 5, 8$ adedlerinden biri ile müntehi olmazı lazımdır.

Bundan istintaç olunur ki, m için yalnız şâyân-ı kabûl olan adedler şunlardır: $2, 5, 6, 7$.

Bunları birer birer tecrübe edelim:

$m = 2\ için,\quad 9m + 1 = 19$ bu murabba'-ı tâm değildir

$m = 5\ için,\quad 9m + 1 =46$ bu murabba'-ı tâm değildir

$m = 6\ için,\quad 9m + 1 = 55$ bu murabba'-ı tâm değildir

Nihayet,

$m = 7$ olduğuna göre

$$9m + 1 = 64 = 8^2$$

olup bu kıymet kabule şayandır. Öyleyse:

$$u = 4 \quad , \quad m = 7$$

olup aranılan adedin:

$$7744 = 88^2$$

olduğu tahkik etmiş olur.

Sual.- İspat etmek matlûbdur ki, iki adedin murabba'ları mecmûunun, diğer iki adedin murabba'ları mecmûu ile hâsıl-ı darbı yine iki adedin murabba'ları mecmûuna müsâvîdir. Faz edelim ki

$$(m^2 + p^2) \quad , \quad (b^2 + c^2)$$

iki murabba'lar mecmûunu göstermiş olsun. Ber-mûcib-i suâl:

$$(b^2 + c^2)\,(m^2 + p^2) \equiv b^2m^2 + b^2p^2 + c^2m^2 + c^2p^2$$

olur. Bu müsâvâtın sol tarafına:

$2bcmp$ hâsılı zam ve ondan tarh olunsa – ki sıfır demektir - şu olur:

$$\begin{aligned}(b^2 + c^2)\,(m^2 + p^2) & \\ &\equiv b^2m^2 + b^2p^2 + 2bcmp + c^2m^2 + c^2p^2 \\ &- 2bcmp \equiv (bm + cp)^2 + (cm - bp)^2.\end{aligned}$$

Yahut bu ifade şöylece de yazılabilir:

$$(bm - cp)^2 + (cm + bp)^2 \equiv (b^2 + c^2)(m^2 + p^2).$$

Bunların her ikisini bir ifadeye rabt edelim:

$$(bm \pm cp)^2 + (cm \mp bp)^2 \equiv (b^2 + c^2)(m^2 + p^2)$$

Tembih.- Bu pek meşhur olan ayniyet, (Léonard de Pise)'nun (Murabba'lar Kitabı)'nda münderiçtir.

Sual.- Her tek adedin murabba'ı, iki aded-i müteâkib mecmûuna müsâvîdir ki, bu adedlerden büyüğü iki murabba' mecmûuna müsâvîdir. Her tek aded $(2p + 1)$ şekline ircâ olunabilir. Bu hâlde:

$$(2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = (2p^2 + 2p) + (2p^2 + 2p + 1)$$

olur.

Görülüyor ki,

$$(2p^2 + 2p + 1) \quad ve \quad (2p^2 + 2p)$$

adedleri iki aded-i müteâkibdir.

Bundan başka, bu iki adedlerden büyüğü olan $2p^2 + 2p + 1$ adedi şöylece de yazılabilir:

$$p^2 + p^2 + 2p + 1$$

Bundan:

$$p^2 + (p - 1)^2$$

olup aded-i a'zamın böylece iki murabba'-ı mecmûu şekline konduğu tahakkuk etmiş olur.

***

Tembih.- Aşağıdaki meselelerde, silsile-i adediyyelerin hadd-i evvelleri (x) ve fazl-ı müşterekleri (r) farz edilecektir.

Sual.- Müsbet olmak şartıyla dokuz aded-i tâm bulmak matlûbdur ki, bunlar bir silsile-i adedîye teşkil etsin ve bu silsilenin haddlerinin murabba'ları mecmûu bir murabba'-ı tâm olsun?

Ber-mûcib-i suâl şöyle bir silsilenin haddlerinin murabba'ları mecmûu aranacak:

$$x^2 + (x + r)^2 + (x + 2r)^2 + \cdots + (x + 8r)^2 \quad \ldots (a)$$

Bedihidir ki burada (x)'lerin murabba'ları mecmûu: $9x^2$'den ibarettir. Birinci hadden başka hadd-i evvellerin hadd-i sânîlere hâsıl-ı darblarının 2 misli alınacağından,

$$2rx + 4rx + 6rx + \cdots . +16rx$$

Yahut:

$$2rx(1 + 2 + 3 + \cdots + 8)$$

dir. Parantez içindeki ifade bir silsile-i adediyyedir. Silsile mecmûu

$$=\frac{(1+8)\times 8}{2}=36$$

olup kurulacak muâdelenin ikinci haddi:

$$2rx\times 36=72rx$$

olur.

Muâdelenin üçüncü haddine gelince: Bu da (a) silsilesinin ikinci haddinden itibaren hadd-i sânîlerin murabba'ları mecmûundan ibarettir. Yani:

$$r^2+4r^2+9r^2+\cdots+64^2$$

olup bu da:

$$r^2(1+4+9+\cdots+64)$$

tür ki, parantez içindeki ifade silsile-i a'dâd-ı tabîiyyenin 8 haddi murabba'ları mecmûundan ibarettir. O da şu murabba'lar düsturuna tatbiken:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{8\times 9\times 17}{6}=204$$

olup muâdelenin üçüncü haddini de $(204r^2)$ teşkil etmiş olur.

Şimdi, teşekkül edecek muâdelenin bulmuş olduğumuz haddlerini toplayıp bir yere yazalım:

$$9x^2+72rx+204r^2$$

Bunun bir murabba'-ı tâma müsâvî olması şart koşulmuş idi. Muâdeleyi basit bir hâle getirmek için o murabba'ı şu şekilde:

$$(3k)^2=9k^2$$

farz edelim. Bu hâlde:

$$9x^2 + 72rx + 204r^2 = 9k^2$$

olup bu muâdelenin sağ tarafındaki üçüncü haddinden maada sair haddlerin kâffesi 9 adediyle kâbil-i taksîmdir. Bu üçüncü haddin emsali de 9 ile kâbil-i taksîm olmak için $r = 3r'$ farz ederek mahalline vaz' ve ıslah edildikte:

$$x^2 + 24r'x + 2004r'^2 - k^2 = 0 \dots (h)$$

olur.

Bu muâdele de usulü vech ile halledildikte:

$$x = -12r' \pm \sqrt{-60r'^2 + k^2} \dots (q)$$

olup meczûrun bir murabba'-ı tâm olması iktiza ettiğinden:

$$k^2 - 60r'^2 = y^2$$

farz edilir ve bu da şöyle yazılabilir:

$$k^2 - y^2 = 60r'^2$$

Bu muâdelenin hâllini umumlaştırmak için şöylece icrâ-yı amel etmeli:

$$4\gamma^2 . k^2 - 4\gamma^2 . y^2 = 4\gamma^2 \times 60r'^2$$

$$y = \frac{15r'^2 - \gamma^2}{\gamma}, \quad k = \frac{15r'^2 - \gamma^2}{\gamma}.$$

(q) münasebetinden de şu müsâvât alınacağından:

$$x = y - 12r' \ ,$$

Yukardaki

$$(3k) \quad ve \quad r = 3r'$$

ifadeleri de nazar-ı dikkate alınarak mesele için lâ-yuadd hâller bulunur.

$$\gamma = 1 \quad ve \quad r' = 1$$

farz etmiş olsak:

$$y = \frac{15 \times 1 - 1}{1} = 14$$

olur.

$$x = y - 12r'$$

olduğundan

$$x = 14 - 12 = 2$$

olup

$$k = \frac{15 \times 1 + 1}{1} = 16\,, \quad 3k = 48$$

olur ki, silsile:

$$2^2 + 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2 + 17^2 + 20^2 + 23^2 + 26^2 = 48^2$$

olur.

$$r' = 2, \quad \gamma = 1$$

olsa

$$y = 59, \quad x = 59 - 24 = 35$$

olup düsturuna tatbiken:

$$k = 61 \quad , \quad 3k = 183$$

bulunduğundan silsile şu olur:

$$35^2 + 41^2 + 47^2 + 53^2 + \ldots + 77^2 + 83^2 = 183^2$$

İşte, r' ile γ kemmiyyetlerine münasip kıymetler verilerek lâ-yuadd haller elde edilir.

Sual.-Müsbet olarak on altı aded-i tâm bulmak matlûbdur ki, bunlar bir silsile-i adediyye teşkil etsin ve haddlerinin murabba'ları mecmûu bir murabba'-ı tâmma müsâvî olsun?

Bundan evvelki meselede hareket ettiğimiz gibi yapacak olursak, yani silsile-i adediyyenin haddleri mecmûuna ve murabba'lar düsturuna tatbîk-i hareket edecek olursak, şu muâdeleyi elde etmiş oluruz:

$$x^2 + 30r'x + 310{r'}^2 = (4k)^2 = 16k^2$$

Burada $r = 2r'$'dür.

Bu muâdele hall ve ıslah edildikte:

$$x = -15r' \pm \sqrt{k^2 - 85{r'}^2}$$

Bundan:

$$k^2 - 85{r'}^2 = y^2 \quad ,$$

Yahut

$$k^2 - y^2 = 85{r'}^2 \qquad x = y - 15r'$$

olup tıpkı bundan evvelki muâdele gibi bir sûret-i umûmiyyede halledilirse:

$$y = \frac{85{r'}^2 - \gamma^2}{2\gamma}, \quad k = \frac{85{r'}^2 + \gamma^2}{2\gamma}$$

olur.

Tatbikat.-

$$r' = 1\,, \quad \gamma = 1$$

farz edilse

$$y = \frac{85 \times (1^2) - 1}{2} = 42$$

$$x = 42 - 15 = 27\,, \qquad k = \frac{85 \times (1^2) + 1}{2} = 43$$

Ve binaenaleyh:

$$4 \times 43 = 172$$

olur ki, matlûb silsile:

$$27^2 + 29^2 + 31^2 + \cdots + 55^2 + 57^2 = 172^2$$

olur.

Diğer bir misal:

$$r' = 3\,, \quad \gamma = 1$$

$$y = \frac{3^2 \times 85 - 1}{2} = 382$$

$$x = 382 - 45 = 337 \quad ve$$

$$k = \frac{3^2 \times 85 + 1}{2} = 383$$

Ve bu sebepten

$$4 \times 383 = 1532$$

olup matlûb silsile de şu olur:

$$337^2 + 343^2 + 349^2 + \cdots + 427^2 = (1532)^2$$

İşte bu minval üzere r' ile γ kemmiyyetlerine münasip kıymetler vererek mesele için lâ-yuadd haller elde edilir.

Sual.- Müsbet yirmi beş aded-i tâm bulmak matlûbdur ki, bunlar, bir silsile-i adediyye teşkil etsin ve bu silsilenin haddlerinin murabba'ları mecmûu bir murabba'-ı tâmma müsâvî olsun?

İhtar.- Bu sualin hallide tıpkı yukardakiler gibidir.

Diophantes / Diophantes Mesâili

Tahlîlât-ı gayr-i muayyene meselelerine: Problémes de Diophantes/Diyofant meseleleri namı verilmiştir.

Bu hâlde, tahlîlât-ı gayr-i muayyenenin başlangıcı: 1500 seneden fazla bir zaman kadar eskidir.

Fi'l-hakika, Diyofant'ın bırakmış olduğu yazılarında, bu nevi mesailin, pek mahirane ve pek doğru olarak ve fakat sûret-i zâhirede irtibatsız gibi görünen, pek muhtelif bir takım hiyel-i hesâbiyye ile halledilmiştir.

Bilakis Hintlilerin âsârında, birinci ve ikinci dereceden muâdelât-ı gayr-i muayyenenin umumî halleri bulunmaktadır.

Eğer Çinlilere ve onların vakâyi'-i târîhiyyelerine inanmak lazım gelirse: Çin- Kiyû- Çâû namında bir âlim, Milattan 2600 sene evvel, ilm-i a'dâd üzerine bir kitap yazmış ve bu kitapta tahlîlât-ı gayr-i muayyeneden bazı mesail münderiç bulunmuş imiş.

Tahlîlât-ı gayr-i muayyenenin ehemmiyetine mebni bir nebzecik tarihinden bahsetmeyi münasip addettik. Şimdi de bir hayli emsal ve mesail vereceğiz. Müteâdil bahsinde bu gibi muâdelâtın birkaç türlü hallerini göstermiş idik. İşte onları rehber ittihaz ederek şu aşağıdaki muâdelât-ı gayr-i muayyenenin halleri talebe efendilerden istenilmelidir:

Aşağıdaki muâdelâtın a'dâd-ı tâmme ve müsbet olarak hallerini bulmak matlûb:

(1). $x + y = 12$

Cevap:[19] $x = 12 - y$,

$y = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\ 11$

$x = 11;\ 10;\ 9;\ 8;\ \ldots\ 1$

(2). $2x + y = 15$

C: $y = 15 - 2x$,

$x = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7$

$y = 13;\ 11;\ 9;\ 7;\ 5;\ 3;\ 1$

(3). $3x + 4y = 19$

C: $x = 1 + 4t,\ t = 0;\ 1$

$y = 4 - 3t. \quad x = 1;\ 5; \quad y = 4;\ 1$

(4). $11x + 2y = 83$

C: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t, \\ y = 36 - 11t \end{array}\right\} t = 0, 1, 2, 3$

$x = 1, 3, 5, 7$

[19] Bundan böyle ihtisara riâyeten cevap kelimesini C ile göstereceğiz.

$y = 36;\ 25;\ 14;\ 3$

(5). $121x + 44y = 286$ [20]

$11x + 4y = 26$

C: $\left.\begin{array}{l} x = 2 + 4t, \\ y = 1 - 11t \end{array}\right\}\ t = 0$

$x = 2$

$y = 1$

(6). $18x + 15y = 48$

$6x + 5y = 16$

C: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + 5t \\ y = 2 - 6t \end{array}\right\}\ t = 0$

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}\right\}$ [21]

(7). $635x = 381y = 54737$

$5x + 3y = 431$

C: $\left.\begin{array}{l} x = 1 + 3t \\ y = 142 - 5t \end{array}\right\}\ t = 0, 1, 2, 3 \ldots$

---

[20] Bu muâdelenin her haddi 11 adedinin misli olduğundan bunun her haddini 11 ile taksîm ettikten sonra halle başlamalıdır.

[21] Şu cihete de nazar-ı dikkati celbederiz ki $ax + by = c$ muâdele-i gayr-i muayyenesinin a'dâd-ı tâmme olarak halli için, a, b, c a'dâd-ı ma'lûmesinde madrûbât-ı müştereke varsa bunlar taksîmle izale edildikten sonra a ile b mütebâyin kalmalıdır.
Eğer a müsbet, kezalik b de müsbet ise yukardaki $a\,x + b\,y = c$ muâdele-i gayr-i muayyenesinin müsbet ve 'aded-i tâm olarak halleri mahduddur. Hâlbuki a müsbet b menfi olursa, c'nin işareti ne olursa olsun müsbet ve tam olarak haller gayr-i mahdûddur. İşte yukardaki (5) ile (6) muâdelelerinde y ile x gayr-i muayyenelerinin tam ve müsbet olarak yalnız birer kıymeti vardır.

$x = 1, 4, 7, \ldots$

$y = 142, 137, 132, \ldots$

(8). $649x + 413y = 6667$

C: $\left.\begin{array}{c} x = 2 + 7t \\ y = 13 - 11t \end{array}\right\}$ $t = 0, 1$

$\left.\begin{array}{c} x = 2, 9 \\ y = 13, 2 \end{array}\right\}$ [22]

(9). $0{,}7x + 0{,}05y = 9{,}5$

C: $\left.\begin{array}{c} x = 13 - t \\ y = 8 + 14t \end{array}\right\}$ $t = 0;\ 1;\ 2;\ 3 \ldots$

$x = 13;\ 12, 11, 10, \ldots\ 1$

$y = 8;\ 22, 36, 50, \ldots\ 176$

(10). $\frac{12x^2+3y-70}{5-3x} = -4x$

C: $\left.\begin{array}{c} x = 2 + 3t \\ y = 10 - 20t \end{array}\right\}$ $t = 0$

$x = 2$

$y = 10$

Âtîdeki misallerin menfi olarak hallerini bulmak matlûb:

(11). $5x - 17y = 41$

C: $\left.\begin{array}{c} x = 15 + 17t \\ y = 2 + 5t \end{array}\right\}$ $t = -1, -2, -3, \ldots$

---

[22] Bu muâdelâtın her haddinde müşterek madrûblar varsa onları, talebe efendiler bularak muâdeleyi bu müşterek madrûblardan tecrit etmelidir.

$x = -2, -19, -36, \dots$

$y = -3, -8, -13$

(12). $-7x + 17y = 87$

C: $\left.\begin{array}{l} x = 17t - 10 \\ y = 7t + 1 \end{array}\right\}$ $t = -1, -2, -3, \dots$

$x = -27, -44, -61, \dots$

$y = -6, -13, -20, \dots$

(13). $-\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{45}{6}$

C: $\left.\begin{array}{l} x = 2t - 15 \\ y = 3t \end{array}\right\}$ $t = -1, -2, -3, \dots$

$x = -17, -19, -21, \dots$

$y = -3, -6, -9, \dots$

Âtîdeki muâdelenin müsbet ve menfi olarak halli matlûb:

(14). $7x + 11y = 361$

C: $\left.\begin{array}{l} x = 6 + 11t \\ y = 29 - 7t \end{array}\right\}$ $t = 0;\ 1;\ 2;\ -1, -2\ \dots$

$x = 6, 17, -5, -16, \dots$

$y = 29, 22, 36, 43, \dots$

Birinci Dereceden Muâdelât-ı Gayr-i Muayyene Veren Meseleler

(1). – 118 adedini iki kısma tefrik ediniz; şu şart ile ki birinci kısım 7, ikincisi de 11 adediyle kâbil-i taksîm olsun.

C: Birinci kısım x, ikincisi de y ile gösterilirse:

$$\left.\begin{aligned} x &= 63 + 77t \\ y &= 55 - 77t \end{aligned}\right\} \quad t = 0$$

$$x = 63$$

$$y = 55$$

Yalnız bir halli vardır: 63 ile 55

(2). – İki kesir-i âdî bulmak matlûbdur; şu şart ile ki birinin mahreci 24, diğerinin mahreci 16 ve bu iki kesrin mecmûu da $\frac{19}{24}$ olsun? Bu nevi kaç kesir vardır?

C: Bu kesirlerden birinin sureti x, diğerinin sureti de y farz edildiğine nazaran:

$$\frac{x}{24} + \frac{y}{16} = \frac{19}{24}$$

Bu muâdele halledilirse, şu kıymetler bulunur:

$$\left.\begin{aligned} x &= 19 - 3t \\ y &= 2t \end{aligned}\right\} \quad t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$x = 16; 13; 10; 7; 4; 1$$

$$y = 2; 4; 6; 8; 10; 12$$

Meseleye tevafuk eden yalnız (6) aded çift kesir vardır ki şunlardır:

$$1^{\circ})\quad \frac{16}{24}+\frac{2}{16}=\frac{19}{24}$$

$$2^{\circ})\quad \frac{13}{24}+\frac{4}{16}=\frac{19}{24}$$

$$3^{\circ})\quad \frac{10}{24}+\frac{6}{16}=\frac{19}{24}$$

$$4^{\circ})\quad \frac{7}{24}+\frac{8}{16}=\frac{19}{24}$$

$$5^{\circ})\quad \frac{4}{24}+\frac{10}{16}=\frac{19}{24}$$

$$6^{\circ})\quad \frac{1}{24}+\frac{12}{16}=\frac{19}{24}$$

(3). – Bir aşçı, tanesi 5,80 franka olan keklik ile adedi 1,40 franka tavşan satın alır. Bunun hepsi için 72 frank verir. Acaba bu av hayvanlarından kaçar tane matbahına getirmiştir?

C: Kekliğin adedini x ve tavşanınkini y ile göstermiş olsak:

$$5{,}80x + 1{,}40y = 72$$

muâdelesi halledilirse iki hallin bulunduğu tahakkuk eder:

$$\left.\begin{array}{r} x = 3 + 7t \\ y = 39 - 29t \end{array}\right\} \quad t = 0; 1$$

$$x = 3, 10$$

$$y = 39, 10$$

(4). – Büyük adamlarla çocuklardan mürekkep bir cemiyet bir cevelân yapmışlar; gezmişler, eğlenmişler. Mecmû'-ı masraf 97,25 franka baliğ olmuş; beher büyük adam 7,15 vermiş; beher çocuk da

3,10 frank te'diye etmiş masraf kapanmış. Acaba bu cemiyette kaç adam, kaç çocuk varmış?

C: $\left.\begin{aligned} x &= 11 + 62t \\ y &= 6 - 143t \end{aligned}\right\} \; t = 0$

$$\left.\begin{aligned} x &= 11 \\ y &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Meselenin yalnız bir halli vardır. O da: 11 büyük adam, 6 çocuktan ibarettir.

(5). – Bir sepet içinde 300'den ziyade, 440'dan noksan armut var. Eğer bu armutlardan 13 çocuğa müsâvâten tevzi' edilse 9 armut sepette kalıyor ve eğer 15 çocuğa müsâvî miktarda tevzi' olunsa 4 armut artıyor. Acaba sepet içinde kaç tane armut vardır?

C: Sepette mevcut armutların adedi x farz edilse, ber-mûcib-i mes'ele şu müteâdiller husûle gelir:

$$x \equiv 9 \quad (muaddil\ 13)$$

$$x \equiv 5 \quad (muaddil\ 15)$$

Bu müteâdiller, usulü dairesinde halledilse,

$$x = 139 + 195t$$

elde edilir.

Meseleye tevafuk eden en küçük aded: 139 adedidir. Lakin meselede sepet içinde 300'den fazla 400'den noksan şartı vardı. Öyle ise, burada: $t = 1$ farz edilse:

$$139 + 193 = 334$$

Yani sepet içinde: 334 tane armudun mevcut olduğu tebeyyün etmiş olur. Eğer $t = 2$ farz edilecek olsa,

$$y = 139 + 390 = 529$$

Yani 529 adedi zuhur eder. Gerçi bu aded de meseleye tevafuk ederse de 400’den fazla olduğu için şarta muhaliftir. Binaenaleyh: 334 adedi meseleye ve şarta tevafuk ettiğinden matlûb olan aded budur.

(6). – İki kardeş bir fabrikada birlikte çalışıyorlar. Büyüğü 18 gün, küçüğü de 13 gün çalışmışlar; her ikisine 142 frank vermişler. Acaba bu iki kardeşten beherinin gündeliği kaç franktır?

C: Büyük kardeşin yevmiyesi x ile, küçük kardeşinki de y ile gösterilmiş olsa; ber-mûcib-i faraziye:

$$18x + 13y = 142$$

muâdele-i gayr-i muayyenesi tahaddüs eder.

Usulü vech ile halledildikte şu münasebât husûle gelir:

$$x = 5 + 13m$$

$$y = 4 - 18m$$

Büyük kardeşin yevmiyesi: 5 frank, küçük kardeşinki: 4 franktır. Burada m yalnız sıfır kıymeti alabilir. Çünkü eğer $m = 1$ olsa:

$$y = -14$$

olur ki, bu hall bî-ma’nâ yani abestir.

Notlar

Not: 1 / Ta‘dâd ve Terkîmin Muhtelif Sistem Nazariyyesi

1. Sual 1.- Ta‘dâd ve terkîmin her sisteminde, kaideyi takaddüm eden adedin dı‘fı ile yine o adedin murabba’ı, aynı rakamlarla fakat ma’kûs olarak tezahür eder.

Mesela; kaide 10 olduğuna göre, bu kaideden evvel gelen 9 adedinin dı‘fı: $2.9 = 18$ ve bunun murabba’ı: $9^2 = 81$’dir. 18 ile 81 ma’kûs iki adeddir.

2. – Bu da’vanın umumî olarak ispatı şudur:

Kaide, umumi olarak B farz olunduğuna göre, $(B-1)$ kaideyi takaddüm eden adeddir. Ber-mûcib-i suâl:

$$2(B-1) = 2B - 2 = B + (B - \ 2) \ \ldots (1)$$

olur. Kezalik,

$$(B-1)^2 = B^2 - 2B + 1 = B(B-2) + 1 \ \ \ldots (2)$$

olur.

Şimdi, yukarıki (1) ile işaret olunan ifadenin altına (2) ifadesini yazarak mukayese edelim:

$$2(B-1) = B + (B-2)$$

$$(B-1)^2 = B(B-2) + 1$$

$B + (B-2)$ ifadesinin birinci kısmı olan B, kaideye müsâvîdir. Öyle ise ikinci mertebenin bir âhâdidir ve kaide olmak münasebetiyle kıymet-i mutlakası 1'dir. Bu da şüphesiz $B(B-2)+1$ ifadesinin ikinci kısmı olan (1), vâhide müsâvîdir.

$$B(B-2) + 1$$

ifadesinin birinci kısmı olan $B(B-2)$, ikinci mertebenin $(B-2)$ âhâdini teşkil eder ki bu da, birinci adedin ikinci kısmı olan $(B-2)$ adedinden ibarettir.

Bu ispatı daha vazıh bir surette ifade edelim:

Bulmuş olduğumuz yukardaki (1) ile (2) ifadelerini nazar-ı dikkate alalım. Ta'dâd ve terkîm sisteminde kaide ne olursa olsun 10 ile gösterilir. Fakat muhtelif sistemlerin kaidesi ise ona müsâvî olarak okunur ve yazılır. Bu hâlde $(B-2)$, kaideden küçük bir adeddir. Bu,

$$B = 10, \quad B - 2 = \alpha$$

farz edilse (1) ile (2) ifadeleri sırasıyla şunlara tahavvül eder:

$$\left.\begin{array}{r} 10 + \alpha = 1\alpha \\ 10.\alpha + 1 = \alpha 1 \end{array}\right\}$$

Bu da, da'vamızı ispat etmiş olur.

Buna, bir misal tatbik edelim: Fakat bundan evvel şunu söyleyelim ki kaide ittihaz edilen adedden küçük erkâmı - ki bunlara erkâm-ı müş'ire namı verilir-, kolaylık olmak için sırasıyla şöylece göstereceğiz:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Şimdi gelelim tatbikimize:

Kaide $B = 15$ olduğuna göre, bunu takaddüm eden, yani bundan evvel gelen aded $a_4 = 14$’tür.

Sualimiz mûcibince bu a_4 adedini bir kere 2 ile darb, bir kere de ikinci kuvvete ref‘ edelim:

$$\left.\begin{aligned} 2.a_4 &= 1a_3 \\ {a_4}^2 &= a_3 1 \end{aligned}\right\} \dots (3)$$

olup da’vamıza mutabık olduğu anlaşılır. (3) ile gösterilen ifadeleri şöylece yaparak bulduk:

$$2.14 = 28$$

Bu 28 adedi, kaide 10 olduğuna göre yazılmıştır. Bunu kaide 15’e tahvil edelim:

[Madde 3, Kaziye 2] mûcibince şöyle hareket etmelidir:

28	15	
$13 = a_3$	(1)	

Bu hâlde,

$$28 = 1a_3$$

Kezalik

$$14^2 = 196$$

adedini de şöylece kaide (15)e tahvil ederiz:

196	15
(1)	$13 = (a_3)$

Bu takdirce:

$$196 = a_3 1$$

olmuş olur.

2. Sual 2. – Bir ta'dâd ve terkîm sisteminde kaide B olduğuna göre, ispat ediniz ki mecmûları $(B + 1)$'e müsâvî iki aded-i tâmmın $(B - 1)$ ile hâsıl-ı darbları, birbirinin ma'kûsu iki aded husûle getirir.

Mesela, $B = 10$ olduğuna göre kaideden evvel gelen $B - 1 = 9$ adedini, mecmûları kaideden sonra ilk gelen $B + 1 = 11$ adedine müsâvî, iki adedle darb etsek, hâsıl-ı darblar, birbirinin ma'kûsu olarak zuhur eder.

Mesela, $7 + 4 = 11$ mecmûları $(B + 1)$'e müsâvî olan 7 ile 4 adedleriyle 9 adedini darb etsek:

$$7.9 = 63 \quad ve \quad 4.9 = 36$$

olur ki bu: 63 ile 36 adedleri - görüldüğü gibi - birbirinin ma'kûsu iki adeddir.

Kezalik, $6 + 5 = 11$ bunu da tatbik edelim:

$$5.9 = 45 \quad ve \quad 6.9 = 54$$

olup 45 ile 54 birbirinin ma'kûsu iki adeddir. Bu sual, bundan evvelki sualin aynıdır. Çünkü $2 + 9 = 11$'dir. Bunun için bu da'va da aynı bundan evvelki gibi ispat olunur.

İşte size muhtasar surette - fakat pek vazıh - bir ispat:

Kaziye:	**İhzarât:**
1°. $-a(B-1) = B(B-c) + (B-a)$	a ile c matlûb iki aded yani $B +$

$\mathbf{2}°. - c(B-1)$ $= B(B-a)$ $+ (B-c)$	$1 = a + c$ Kaideye takaddüm eden aded $= B - 1$ $B - a = c - 1$ $B - c = a - 1$ $a = B + 1 - c$ $c = B + 1 - a$

Ameliyat:

$$\mathbf{1}°. -a(B-1) = aB - a = B + (a-1)B - a$$
$$= B(a-1) + (B-a) = B(B-c) + (B-a)$$

$$\mathbf{2}°. -c(B-1) = cB - c = cB - (B+1-a) = cB - B - 1 + a$$
$$= B(B-a) + (B-c)$$

Şimdi, 1° ile 2°'nin son ifadelerini birbiri altına yazalım:

$$\mathbf{1}°.\ B(B-c) + (B-a)$$

$$\mathbf{2}°.\ B(B-a) + (B-c)$$

İşte, şu iki ifadeye sathi bir nazar imâle edilse, aynı iki adedin – ma'kûs olarak – yazılmış olduğu görülür.

3. Sual 3. – Ta'dâd ve terkîmin hangi sisteminde olursa olsun, usûl-i a'şâriyye üzere yazılmış 9 ve 11 adedlerinin havâssına malik hangi adedler vardır:

Usûl-i a'şâriyyede, yani kaide 10 olan sistemde, 9 ile 11 adedleri:

$$(10-1)\ \ ve\ \ (10+1)$$

şeklindedir. Ben derim ki, bir sûret-i umûmiyyede, B kaidesine göre yazılmış adedler içinde:

$$(B-1) \ ve \ \ (B+1)$$

şeklindeki adedler de aynı havâssı haizdirler.

Zîrâ, B kaidesine göre yazılmış N adedini, ve bunun sağdan sola doğru rakamlarını:

$$a, b, c, d, \ldots$$

farz edelim:

Bu N adedi şöylece yazılır:

$$N = a + b.B + c.B^2 + d.B^3 + \cdots$$

Ve yine bu N adedi şu şekle de konabilir:

$$N = [b.(B-1) + c.(B^2-1) + d.(B^3-1) + \cdots] + [a + b + c + d + \cdots]$$

Yahut:

$$N = Mul.de\,(B-1) + (a + b + c + d + \cdots)$$

Bundan şu:

$$N \equiv (a + b + c + d + \cdots) \quad [muaddil\,(B-1)]$$

olur ki, bu ifadenin manası şudur:

"Kaide B olarak yazılmış bir N adedi, rakamları mecmûu $(B-1)$ adediyle kâbil-i taksîm ise, bu aded de $(B-1)$ adediyle kâbil-i taksîmdir."

Aynı N adedi şu şekle de konabilir:

$$N = [b.(B+1) + c.(B^2-1) + d.(B^3+1) + \cdots] \\ + [(a+c+\cdots) - (b+d+\cdots)]$$

Şimdi bu müsâvâtın ikinci tarafının, yani sağ tarafın birinci kısmı $(B+1)$ ile kâbil-i taksîmdir. Öyle ise şu münasebet mevcuttur:

$$N = Mul.de\ (B+1) + [(a+c+\cdots) - (b+d+\cdots)]$$

Bundan:

$$N \equiv [(a+c+\cdots) - (b+d+\cdots)] \quad [muaddil\ (B+1)]$$

Bu ifade de şöylece tefsir edilir:

"Kaide B olarak yazılmış bir N adedi - tek mertebe rakamları mecmûundan, çift mertebe rakamları mecmûu tarh edilip tefâzul $(B+1)$ adedi ile kâbil-i taksîm ise - $(B+1)$ adedi ile kâbil-i taksîmdir."

Demek oluyor ki, usûl-i a'şâriyye üzere, yani kaidesi (10) olarak yazılmış 9 ile 11 adedlerinin havâssına herhangi B kaidesinde yazılmış $(B-1)$ ile $(B+1)$ adedleri de maliktirler.

4. Sual 4. – Kaidesi herhangi bir B olarak yazılmış üç rakamlı bir adedin ma'kûsu ile tefâzulü alınırsa, bu tefâzulün orta rakamı: $(B-1)$ adedine ve iki nihayetindeki rakamlar mecmûu da yine: $(B-1)$ adedine müsâvîdir.

Tasavvur olunan adedi: mnp farz edelim. Bu aded kaide B olduğuna göre şöyle temsil olunur:

$$m.B^2 + n.B + p$$

Aynı adedin ma'kûsu da şöylece yazılır:

$$p.B^2 + n.B + m$$

Bu iki aded beynindeki tefâzul de şudur:

$$m.B^2 - p.B^2 + p - m$$

Yahut:

$$m.B^2 - p.B^2 + B^2 - B^2 - B + p + B - m$$

Veyahut da:

$$B^2(m - p - 1) + (B - 1).B + (p + B - m)$$

olur.

İşte, şu son ifadeye dikkatle bakılırsa, şu görülür:

Bu adedin ortadaki rakamı, kaide B olduğuna göre yazılmış üç rakamlı bir aded son rakam müş'ir olan: $(B - 1)$'e müsâvî; ve iki nihayetindeki şu rakamları mecmûu olan:

$$p + B - m + m - p - 1 = B - 1$$

de yine son rakam müş'ir olan: $(B - 1)$'e müsâvîdir. Da'vamız sübut bulmuştur.

5. Sual 5. – A'dâd-ı tâmmenin kâffesi, beheri yalnız bir defa alınmak şartıyla, 2 adedinin kuvvetleri mecmûuna müsâvîdir. [Vâhid: 2^0 tasavvur edilmiştir.]

Herhangi bir çift adedini olursa olsun ve mesela 62 adedini tasavvur edelim ve bu adedi, kaide 2 olduğuna göre ifade edelim ki, bunda yalnız (0) ile (1) rakamından başka rakam kullanmaya ihtiyaç yoktur.

Şimdi bu 62 adedini, kaide 2 olduğuna göre tahvil edelim:

Burada (Madde 3 Kaziye 2)deki algoritma mûcibince şöyle hareket etmelidir:

62	2	2	2	2	2
(0)	31	15	7	3	(1)
	(1)	(1)	(1)	(1)	

İşte bu algoritma mûcibince kaide (10) olduğuna göre yazılmış (62) adedi kaide 2 olduğuna tahvil edilmiş olup şu netice: $62_{10} = 111110_2$ elde edilmiş olur.

Şimdi, farz edelim ki, bize şu: 111110_2 kaide 2 olarak yazılmış adedi veriyorlar. Bunu biz kaide (10) olan adede tahvil etmek için şekl-i umûmîye müracaat (Madde 10) ederek şöyle yazarız:

$$\begin{aligned} 111110_2 &= 0 + 1.2 + 1.2^2 + 1.2^3 + 1.2^4 + 1.2^5 \\ &= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 \end{aligned}$$

Bu netice ise, da'vamızın çift bir aded hakkında ispatı.

Gelelim şimdi de tek bir adede ve mesela 53 adedini ele alalım. Bu adedi de, bundan evvelki 62 gibi kaide 2 olduğuna göre tahvil edelim:

53	2	2	2	2	2
(1)	26	13	6	3	(1)
	(0)	(1)	(0)	(1)	

Bundan şu:

$$53_{10} = 110101$$

elde edilir.

Şimdi kaide 2'den kaide 10'a dönersek şöyle yapmamız lazım gelir:

$$(110101)_2 = 1 + 0.2 + 1.2^2 + 0.2^3 + 1.2^4 + 1.2^5$$
$$= 2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^5 = (53)_{10}$$

Bununla da'vamızın ikinci kısmı da ispat edilmiş oluyor.

Tembih: İspat edegeldiğimiz hassayı, faideli bir surette kullanabiliriz. Mesela (2)'nin kuvvetlerince gramlar alsak yani şöyle:

$$1\,gram,\ 2g,\ 4g,\ 8g,\ 16g,\ 32g,\ 64g \ldots$$ [23]

Bunların içinde 3 gram yok; 3 gramlık bir şeyi:

$$1 + 2 = 3$$

ile tartarız. Kezalik 5 gramlığı:

$$1 + 4 = 5$$

7 gramlığı:

$$1 + 2 + 4 = 7$$

Ve hakeza…

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 = 16.2 - 1 = 2^5 - 1$$

İlk 6 vezn ile de ta 63 vezne kadar eşyayı tartabiliriz. Yani:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63 = 32.2 - 1 = 2^6 - 1$$

Ve bir sûret-i umûmiyyede ilk n kadar evzân ile, şu: $2^n - 1$ şekle kadar olan bi'l-cümle gramlık eşya tartılabilir.

[23] Gramı, muhtasaran şöyle göstereceğiz: g

Not: 2 / A'dâd-ı Asliyye Nazariyatı

6. Da'vâ-yı Nazarî: Müteakip iki aded-i tâm mütebâyineyndir.

İki aded-i müteâkib, şu:

$$n, \quad n+1$$

şeklindedir.

n ile $n+1$ adedlerinin her kâsım-ı müştereki bunların

$$n+1-n=1$$

tefâzulünü de tamamen taksîm etmesi lazım gelir. Hâlbuki (1) vâhid yalnız kendisiyle kâbîl-i taksîmdir. Bu sebepten, iki aded-i müteâkibin kâsım-ı müştereki olamaz. Öyleyse onlar: mütebâyindirler.

7. Da'vâ-yı Nazarî: İki adedden birine vâhid zam veya ondan vâhid tarh edildiği hâlde diğer adedin emsali bir aded zuhur ederse, bu iki aded mütebâyindirler.

Mesela, 3 ile 11 adedleri gibi ki, 11 adedine vâhid zam edilse 12 olup bu da 3 adedinin mislidir.

Kezalik, 5 adediyle 11 adedlerinden 11'den vâhid tarh edilse 10 adedi hâsıl olur ki, bu da 5 adedinin mislidir.

İşte bu 3 ile 11, 5 ile 11 adedleri mütebâyindirler.

Zîrâ, bir sûret-i umûmiyyede, o iki adedi A ile B farz edelim. Bermûcib-i da'vâ:

$$B \pm 1 = A.q$$

münasebâtı husûle gelir. Böyle olunca, ben derim ki, bu B ile A adedleri mütebâyindir.

Zîrâ, B ile A adedlerinin her kâsım-ı müştereki, $A.q$ ile B adedlerini de tamamen taksîm eder, bu hâlde bunların tefâzulü olan ± 1'ide tamamen taksîm etmesi lazım gelir. Bu ise hilâf-ı hakîkattir.

Bu sebepten A ile B adedleri mütebâyindir.

8. Da'vâ-yı Nazarî: n ve N herhangi iki aded-i tâm olursa olsun, ispat ediniz ki, N ile $n.N+1$ adedleri mütebâyindir.

Zîrâ N adedini tamamen taksîm eden her aded, $n.N$ adedlerini de tamamen taksîm eder.

Bununla beraber N ve $n.N+1$ adedlerinin bir kâsım-ı müştereki,

$$n.N \; ve \;\; n.N+1$$

adedlerini tamamen taksîm edeceğinden, bunların şu:

$$n.N+1-n.N=1$$

tefâzulünü de taksîm etmesi lazım gelir ki bu ise hilâf-ı hakîkattir.

Bu hâlde da'vamız sübut bulmuştur.

9. Da'vâ-yı Nazarî: İspat ediniz ki, şu:

$$n, \quad n+1, \quad 2n+1$$

üç aded ikişer ikişer mütebâyindirler.

(6'ncı madde) mûcibince, $n, \;\; n+1$ adedleri mütebâyindirler.

(8'nci madde) mûcibince: $n \quad ve \; 2n+1$ adedleri mütebâyineyndir.

Yalnız şu:

$$n+1, \qquad 2n+1$$

adedin mütebâyin olduklarını ispat etmek kaldı.

Eğer bu:

$$n + 1 \quad ve \quad 2n + 1$$

adedlerinin bir kâsım-ı müştereki varsa, o kâsım-ı müşterekin:

$$2n + 1 - (n + 1) = n$$

tefâzulünü de tamamen taksîm etmesi icap eder.

İmdi, n ile $n + 1$ mütebâyindir. Öyleyse $(n + 1)$ ile $(2n + 1)$'de mütebâyin olup matlûb sabit olur.

10. Da'vâ-yı Nazarî: a ile b iki aded-i tâmdır ve $(a^2 - b^2)$ de aslî bir adeddir. İspat ediniz ki, $a^2 - b^2$ tefâzulü $(a + b)$ mecmûuna müsâvîdir.

Zîrâ,

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

müsâvâtında mademki, $(a^2 - b^2)$ aslî bir adedi irâe ediyor, bu hâlde bu müsâvâtın doğru olması için, müsâvî olduğu $(a + b)(a - b)$ madrûblarından birinin vâhide müsâvî olması lâ-büddür.

Hâlbuki a ile b adedlerinden beheri aded-i tâm olduklarından $(a + b)$ mecmûu vâhide müsâvî olamaz. Bu hâlde:

$$a - b = 1$$

olduğundan

$$a^2 - b^2 = a + b$$

müsâvâtı tahaddüs edip matlûb sabit olur.

11. Da'vâ-yı Nazarî: a ve b gibi iki aded, 5 ile mütebâyin olsalar, $(a^2 + 2b^2)$ mecmûu 5 adedinin misli olamaz.

5 kâsımına göre, 5 ile kâbil-i taksîm olmayan adedler şu aşağıdaki şekillerden başka şekilde tezahür edemezler:

$$Mult.5+1, \quad Mult.5+2, \quad Mult.5-2, \quad Mult.5-1.$$

Bundan istintaç olunur ki a ve b âtîdeki cetvelde hülâsa edilen kıymetleri alabilirler: Evvel-emirde şurasını der-hâtır ettireyim ki:

$$a=5p+1, \quad b=5q+1 \ldots$$

gibi şekiller şu aşağıdaki müteâdillere tahavvül edilirler:

$$\left.\begin{array}{r} a\equiv 1 \\ b\equiv 1 \end{array}\right\} (muaddil\ 5)$$

Bunu nazar-ı dikkate alarak cetvelimize devam edelim:

$$\left.\begin{array}{r} a\equiv 1 \\ b\equiv 1 \end{array}\right\} \quad (muaddil\ 5) \qquad bunlardan: (5) \quad a^2+2b^2\equiv 3,$$

$$\left.\begin{array}{r} a\equiv 1 \\ b\equiv 2 \end{array}\right\} \quad (5) \qquad bunlardan: (5) \quad a^2+2b^2\equiv -1,$$

$$\left.\begin{array}{r} a\equiv 1 \\ b\equiv -2 \end{array}\right\} \quad (5) \qquad bunlardan: (5) \quad a^2+2b^2\equiv -1,$$

$$\left.\begin{array}{r} a\equiv 1 \\ b\equiv -1 \end{array}\right\} \quad (5) \qquad bunlardan: (5) \quad a^2+2b^2\equiv 3,$$

$$\left.\begin{array}{r} a\equiv 2 \\ b\equiv 1 \end{array}\right\} \quad (5) \qquad bunlardan: (5) \quad a^2+2b^2\equiv 1,$$

$$\left.\begin{array}{r} a\equiv 2 \\ b\equiv 2 \end{array}\right\} \quad (5) \qquad bunlardan: (5) \quad a^2+2b^2\equiv 2,$$

$$\left.\begin{array}{r} a\equiv 2 \\ b\equiv -2 \end{array}\right\} \quad (5) \qquad bunlardan: (5) \quad a^2+2b^2\equiv 2,$$

$$\left.\begin{array}{r} a\equiv 2 \\ b\equiv -1 \end{array}\right\} \quad (5) \qquad bunlardan: (5) \quad a^2+2b^2\equiv 1,$$

$$\left.\begin{array}{r} a\equiv -2 \\ b\equiv 1 \end{array}\right\} \quad (5) \qquad bunlardan: (5) \quad a^2+2b^2\equiv 1,$$

$$\left.\begin{matrix} a \equiv -2 \\ b \equiv 2 \end{matrix}\right\} \quad (5) \qquad bunlardan: (5) \quad a^2 + 2b^2 \equiv 2,$$

$$\left.\begin{matrix} a \equiv -2 \\ b \equiv -2 \end{matrix}\right\} \quad (5) \qquad bunlardan: (5) \quad a^2 + 2b^2 \equiv 2,$$

$$\left.\begin{matrix} a \equiv -2 \\ b \equiv -1 \end{matrix}\right\} \quad (5) \qquad bunlardan: (5) \quad a^2 + 2b^2 \equiv 1,$$

$$\left.\begin{matrix} a \equiv -1 \\ b \equiv 1 \end{matrix}\right\} \quad (5) \qquad bunlardan: (5) \quad a^2 + 2b^2 \equiv 3,$$

$$\left.\begin{matrix} a \equiv -1 \\ b \equiv 2 \end{matrix}\right\} \quad (5) \qquad bunlardan: (5) \quad a^2 + 2b^2 \equiv -1,$$

$$\left.\begin{matrix} a \equiv -1 \\ b \equiv -2 \end{matrix}\right\} \quad (5) \qquad bunlardan: (5) \quad a^2 + 2b^2 \equiv -1,$$

$$\left.\begin{matrix} a \equiv -1 \\ b \equiv -1 \end{matrix}\right\} \quad (5) \qquad bunlardan: (5) \quad a^2 + 2b^2 \equiv 3,$$

Bu cetveldeki bakiyeler nazar-ı dikkate alınırsa görülür ki bunlar:

$$(+3), \quad (+2), \quad (-2), \quad (+1), \quad (-1)$$

den ibarettir. En nihayetki $5p + 3$ şeklinden hâsıl olup o da $(5p - 2)$ demek olduğundan cetvelin bütün muhteviyatı hülâsa edilecek olursa, $(a^2 + 2b^2)$ ifadesinin yalnız şu dört kıymeti alabileceği tezahür eder:

$$5p \pm 2, \quad 5q \pm 1$$

Bundan da: $a^2 + 2b^2$'nin hiçbir vech ile (5)'in tamamen misli olamayacağı, yani (5) ile kâbil-i taksîm olmayacağı ispat edilmiş olur.

12. p adedi, N adedini taksîm etmeyen bir aslî-yi mutlaktır.

İspat ediniz ki, eğer p ile taksîm edilerek (1) bakiye veren (N)'nin en küçük kuvveti: $N^{2\alpha}$ olsa, $(N^{\alpha} + 1)$ adedi p ile kâbil-i taksîmdir.

Zîrâ, ber-mûcib-i faraziye:

$$N^{2a} - 1 \equiv 0 \qquad (muaddil\ p)$$

müteâdili sahihtir.

Bundan ise:

$$(N^a + 1)\ (N^a - 1) \quad (muaddil\ p)$$

münasebeti tahaddüs eder.

Lakin $(N^a - 1)$ ifadesi p ile kâbil-i taksîm değildir. Çünkü eğer öyle olsa,

$$(N^a \equiv 1) \quad (p\ muaddil)$$

olmak lazımdır.

Hâlbuki, p ile taksîm edilerek (1) bakiye veren (N)'in en küçük kuvveti: N^{2a}'dır. Öyleyse bu faraziye sahih değildir.

Bu sebepten:

$$N^a + 1 \equiv 0 \quad (muaddil\ p)$$

olmak zaruridir.

13. Sual: Üçten büyük bir aded-i aslî bulmak matlûbdur; şu şart ile ki, bu adedin murabba'ından vâhid tarh olunup hâsıl-ı tarh 8 adedi üzerine taksîm olunursa hâric-i kısmet bir adedi aslî olsun?

Ber-mûcib-i sual:

$$\frac{a^2 - 1}{8} = b$$

münasebeti tahaddüs eder. Burada a adedi 3'ten büyük aslî bir adeddir. b'de bir aded-i aslîdir. Yukarıki müsâvât şöyle de yazılır:

$$(a+1)\,(a-1)\ = 8b.$$

Şimdi, a ededi 3 ile kâbil-i taksîm olmadığından $(a+1)$ ve $(a-1)$ adedlerinden biri 3 adedin mislidir. Bu sebepten

$$8b \equiv 0 \quad (muaddil\ 3)$$

olmak zaruridir.

İmdi, 8 adedi 3 ile mütebâyin olduğundan 3'ün b'yi taksim etmesi lazımdır. Hâlbuki b aslîdir. Öyleyse $b = 3$ olmak zaruridir.

Bu takdirce:

$$a^2 - 1 = 8.3 = 24$$

olup, bundan:

$$a^2 = 25$$

Ve bundan da:

$$a = 5$$

olup matlûb mesele halledilmiş olur.

14. Sual: Bir aded-i aslî, a'dâd-ı ferdiyye-i müteâkibe silsilesi mecmûuna müsâvî olamaz.

Zîrâ, bir aded-i aslî – müteâkib olsun olmasın – çift a'dâd-ı ferdiyye mecmûuna müsâvî olamaz. Çünkü, çift a'dâd-ı ferdiyye mecmûu: çifttir.

Biz burada, yalnız sayısı tek olan a'dâd-ı ferdiyye-i müteâkibeden müteşekkil bir silsileyi tasavvur edeceğiz.

Farz edelim ki, $(2n+1)$ tane a'dâd-ı ferdiyye-i müteâkibe vardır. Bu adedlerin hadd-i vasatîsi yani orta haddi: $(2p+1)$ şeklindedir.

Mademki, $(2p+1)$ orta haddir ve mademki, silsilenin adedi de: $(2n+1)$ kadardır.

Bu hâlde, orta hadd olan $(2p+1)$ adedinin sağında: 2'şer 2'şer tezâyüd ederek giden n kadar hadd vardır. Kezalik solunda da 2'şer 2'şer tenakus ederek giden n kadar hadd vardır.

Bu takdirce, hadd-i vasatî olan $(2p+1)$ adedinin sağında ve solunda eb'âd-ı mütesâviyede bulunan haddler mecmûu bu hadd-i vasatînin 2 misline, yani:

$$2(2p+1)$$

adedine müsâvîdir. Bu sebepten, $(2n+1)$ kadar tasavvur olunan haddler mecmûunun kıymeti: n kere

$$2(2p+1)$$

ile hadd-i vasat mecmûuna, yani:

$$2n(2p+1)\ +\ (2p+1)$$

ifadesine müsâvî olup bundan:

$$4np+2n+2p+1$$

Yahut:

$$2p(2n+1)\ +\ (2n+1)$$

Ve nihayet:

$$(2n+1)\,(2p+1)$$

olup matlûb sabit olur. Yani şu son ifade aslî bir aded olmayıp mürekkeptir.

15. Sual: Eğer p bir aded-i aslî ise, p'ye bir aded-i tâmmın murabba'ı zam olunup hâsıl-ı mecmûu murabba'-ı tâm veren en küçük aded: $\frac{p-1}{2}$'dir. p bir aded-i ferd olduğundan: $\frac{p-1}{2}$ çift bir addeddir. Bundan başka:

$$p + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$$

münasebetinde $\frac{p+1}{2}$ de bir aded-i tâmdır. $\frac{p-1}{2}$ ise yukarda beyan edilen hassayı haizdir.

Şimdi, a ile b iki aded-i tâm olsun; ve bu adedler şu şarta:

$$p + a^2 = b^2 \ldots (H).$$

tevafuk etsin. Bu müsâvâttan şu münasebet elde edilir:

$$p = b^2 - a^2 = (b+a)(b-a),$$

p aslî olduğundan, bizzarure şu münasebât tahaddüs eder:

$$b + a = p \quad , \quad b - a = 1$$

Bundan da:

$$a = \frac{p-1}{2} \quad , \quad b = \frac{p+1}{2}$$

husûle gelir. a ile b'nin müsâvîleri (H) müsâvâtında mahallerine vaz' edildikte:

$$p + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$$

olur.

Burada $\frac{p-1}{2}$ adedi, yukarda beyan olunan hassayı haiz yalnız bu aded ve en küçük adeddir.

Tembih: $p = 2$, bu hassadan müstesnadır. Bilakis, p adedi ferd olarak, eğer $\frac{p-1}{2}$ dahi küçük olmak şartıyla murabba'ı p'ye zam olunur ve bu mecmû murabba'-ı tâm olursa bu hâlde p adedi aslîdir.

Eğer, p ferd olur ve fakat aslî olmazsa, bunun, hiçbiri vâhide müsâvî olmamak şartıyla α ve β gibi iki tek madrûba tefriki mümkündür.

Yani şöyle: $p = \alpha\beta$ bundan başka da $\beta \geq \alpha$ farz edelim.

Şu:

$$\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 + p \equiv \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 + \beta\alpha \equiv \left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)^2$$

ayniyetler doğrudur ve α ile β adedlerinden beheri ferd olduğundan:

$$\frac{\beta+\alpha}{2} \; ile \; \frac{\beta-\alpha}{2}$$

adedleri tamdır ve $\alpha > 1$ olduğundan, β adedi p'den asgardır. Bu hâlde de $\frac{\beta-\alpha}{2}$ adedi, $\frac{p-1}{2}$'den asgardır.

İmdi, p adedini gayr-i aslî farz edersek, bu hâlde $\frac{p-1}{2}$'den asgar bir aded bulunacak ki, bu tam murabba'ı p'ye zam edilirse mecmû bir murabba'-ı tâm olacak, bu ise da'vamıza muhaliftir. Bu sebepten p adedi, bir aded-i aslî-yi mutlaktır.

Netice: Ferd bir p adedinin aslî olup olmadığını bilmek için bu p adedine $\frac{p-1}{2}$ adedinin murabba'ı zam olunur; eğer bu mecmû, bir murabba'-ı tâm verirse, p adedi aslîdir.

Misaller:

$$11+\left(\frac{10}{2}\right)^2=11+5^2=11+25=36=6^2,$$

$$13+\left(\frac{12}{2}\right)^2=13+6^2=13+36=49=7^2,$$

$$17+\left(\frac{16}{2}\right)^2=17+8^2=17+64=81=9^2.$$

İşte, ispat edegeldiğimiz kanuna muvafık olan: $11, 13, 17$ adedleri aslîdirler.

16. Sual: Bir adedin kâsımları, sırasıyla, yani en küçüğü olan vâhidden bed' ile, en büyüğü olan kendisine kadar – bir hatt-ı ufkî üzerine - dizilmiş olsa, bu vech ile husûle gelen silsilenin evvel ve âhirinden eb'âd-ı mütesâviyede bulunan iki kâsımın hâsıl-ı darbı, bir sabit miktara yani adedin kendisine müsâvîdir.

Mesela, 36 adedinin kâsımları: sırasıyla vâhidden bed' ile kendisine kadar bir hatt-ı ufkî üzerine şöylece dizilmiş olsa:

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 6,\quad 9,\quad 12,\quad 18,\quad 36$$

Bu silsilenin iki nihayetinden eb'âd-ı mütesâviyedeki iki kâsımın hâsıl-ı darbları şöylece sabit bir miktara yani kendisine müsâvîdir:

$$1.36=36,\quad 2.18=36,\quad 3.12=36,\quad 4.9=36,\quad 6.6=36.$$ [24]

Şimdi, bu da'vayı umumî bir surette ispat edelim.

Farz edelim ki adedin kendisi p, ve bi'l-cümle kâsımları da sırasıyla:

$$1<a<b<c<d<\cdots,\quad <t<m<n<p,$$

[24] Yukardan beri ve şimdiden sonra da mesela (8.6) gibi bir ifadede $(.)$ şu $\times$ işareti yerine kullanılır.

olsun.

p adedini müteakiben bu kâsımlarının beheriyle taksîm etmiş olsak:

$$\frac{p}{p} < \frac{p}{n} < \frac{p}{m} < \frac{p}{t} < \cdots, \quad < \frac{p}{c} < \frac{p}{b} < \frac{p}{a} < \frac{p}{1}$$

hâric-i kısmetleri, yine aynı kâsımları irâe ederler. Bu ikinci silsilenin haddleri, mütenâzıran ve mütekâbilen birincinin haddlerine müsâvîdir. Öyleyse şu müsâvâtlar husûle gelir:

$$1 = \frac{p}{p}, \quad a = \frac{p}{n}, \quad b = \frac{p}{m}, \dots, m = 1 = \frac{p}{b}, \quad n = \frac{p}{a}, \quad p = \frac{p}{1}.$$

Bunlardan da:

$$p.1 = p, \quad a.n = p, \quad b.m = p, \dots, m.b = p, \quad n.a = p, \quad 1.p = p.$$

olup matlûb sabit olur.

17. Da'vâ-yı Nazarî: Tek bir aded, aslî ise, murabba'-ı tâm iki adedin tefâzulüne – yalnız bir tarzda – müsâvîdir.

O tek aded-i aslî, farz edelim ki, N ve a^2 ile b^2 de iki adedin murabba'ları olarak:

$$N = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad \dots (k)$$

münasebâtı husûle gelsin.

N bir aded-i aslî olduğundan $(a + b)$ ve $(a - b)$ ifadelerinden biri vâhide, diğeri de N adedine müsâvî olmak zaruridir.

Bu hâlde şu münasebât husûle gelir:

$$N = a + b, \quad 1 = a - b$$

Bunlardan şu:

$$a = \frac{N+1}{2}, \quad b = \frac{N-1}{2}$$

(k) münâsebâtında a ile b adedlerinin müsâvîleri mahallerine vaz‘ olundukta:

$$N = \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{N-1}{2}\right)^2 \ldots (M)$$

olmuş olur.

Tembih: (Hesâb-ı a'lâ)'nın mabudu olan (Fermat) tarafından ifade olunan yukarıki da'vâ-yı nazarî, bize verilen bir adedin aslî olup olmadığını anlamaya müsaade eder.

Farz edelim ki 17 adedinin aslî olup olmadığını anlamak istiyoruz; evvelen, sühûlet olmak için yukarıki (M) müsâvâtını şu tarzda yazalım:

$$N + \left(\frac{N-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{N+1}{2}\right)^2$$

Şimdi, 17'nin aslî olup olmadığını muayeneye gelelim.

Evvel-emirde:

$$\left(\frac{17-1}{2}\right)^2 = 64$$

adedini bulur ihzâr ederiz.

Bundan sonra:

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad 36 \ldots$$

tâ vâhidden bed’ ile (64)e kadar silsile-i a‘dâd-ı tabîiyyenin murabba’larını alır (17) adedine zam ederiz, eğer burada olduğu gibi

$$17 + 64 = 9^2 = 81$$

murabba’-ı tâmmından evvel diğer bir murabba’-ı tâm hâsıl olmazsa o aded 17 gibi aslîdir. Yok, 64’ten evvel gelen murabba’-ı tâmlardan biri 17 adedine zam olunup da murabba’-ı tâm verirse o aded aslî değildir.

Mesela 21 adedini deneyelim:

$$21 + 1 = 22, \quad 21 + 4 = 25$$

İşte görülüyor ki, 21 adedine 4 murabba’ı zam edilince 25 murabba’-ı tâm husûle geliyor. Öyleyse 21 adedi aslî değildir.

Kezalik, 33 adedini ele alalım:

$$33 + 9 = 42 \quad 33 + 4 = 37 \quad 33 + 1 = 34 \quad 33 + 16 = 49 = 7^2$$

Burada yine:

$$\left(\frac{33 - 1}{2}\right)^2 = 256$$

adedine varmadan (7)’nin murabba’ı husûle geliyor. Bu hâlde 33 adedi de aslî değildir.

18. Sual: a ile b mütebâyin iki adeddir. İspat ediniz ki, eğer:

$$a, \quad 2a, \quad 3a, \quad 4a, \dots (b-1)\,a,$$

silsilesinin her bir haddi b ile taksîm olunsa, zuhur edecek olan hâric-i kısmetler mecmûu:

$$\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$$

ifadesine müsâvîdir.

Zîrâ, denildiği gibi yapılan taksîmler ameliyatından zuhur eden muhtelif bâkîleri:

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad \ldots, \quad r_{b-1}$$

rumuzları ile göstermiş olsak, bu hâlde hâric-i kısmetler tam olarak şunlarla irâe olunur:

$$\frac{a-r_1}{b}, \quad \frac{2a-r_2}{b}, \quad \frac{3a-r_3}{b}, \quad \ldots, \quad \frac{(b-1)a-r_{b-1}}{b}$$

Bu hâric-i kısmetlerin kâffesinin mecmûu da şu ifade ile gösterilir:

$$S=\frac{a(1+2+3+\cdots+(b-1)-(r_1+r_2+r_3+\cdots+r_{b-1})}{b}$$

Lakin,

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad \ldots, \quad r_{b-1}$$

bâkîleri , [Madde 82]'de ispat edildiği vech ile – sıralarından sarf-ı nazar –

$$1,2,3,4,\ldots,(b-1)$$

adedlerine müsâvîdir. Öyle ise:

$$S=\frac{a-1}{b}\,(1+2+3+\cdots+b-1)=\frac{1}{2}\,(a-1)(b-1)$$

olup mesele halledilmiş olur.

Not:3 / Gayr-i Müşterek'ül Mikyâs Adedler, Kemmiyât-ı Asamma ve Muhdese

19. Da'vâ-yı Nazarî: Müsbet bir kemmiyyetin, birbirine müsâvî ve işaretleri muhtelif iki cezr-i murabba'ı ve yalnız iki cezr-i murabba'ı vardır.

1^0. $x = \sqrt{9}$ farz edelim. x'in bir kıymeti vardır ki, bunun murabba'ı: 9'dur. Lakin gerek $+3$ olsun gerekse -3 olsun bunların her ikisinin de ikinci kuvvete ref'leri: $+9$ adedini verirler. Öyle ise şöyle yazmak doğrudur.

$$x = \sqrt{9} = \pm 3$$

Bir sûret-i umûmiyyede herhangi bir B adedin olursa olsun cezr-i murabba'ı $\pm\sqrt{B}$ suretinde gösterilmelidir.

2^0. Müsbet olan n^2 adedinin cezr-i murabba'ı $\sqrt{n^2}$ ve bunun kıymeti de x olsun. Bu hâlde:

$$x = \sqrt{n^2}$$

münasebeti husûle gelir.

Bu müsâvâtın her iki tarafını da terbî' edelim:

$$x^2 = n^2$$

Veyahut

$$x^2 - n^2 = 0$$

olur. Lakin iki kemmiyyetin murabba'ları beynindeki fazl:

$$(x + n)(x - n) = 0$$

dır. Madrûbat-ı müteaddideden ibaret bir hâsıl-ı darbın sıfır olması, madrûblarından birinin sıfır olmasına vabestedir. Bu sebepten:

$$x - n = 0 \quad bundan: \quad x = n$$

$$x + n = 0 \quad bundan\ da \quad z = -n$$

olur.

Mademki

$$(x+n)(x-n)$$

hâsıl-ı darbını sıfıra irca edecek diğer bir vasıta, yani üçüncü bir vasıta yoktur.

Bu hâlde, bir cezr-i murabba'ının yalnız birbirine müsâvî ve işaretleri muhtelif iki kıymeti vardır, başka yoktur.

Cezirlerin Hesâbı

20. $8\sqrt{a} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{b} \quad ile \quad 9\sqrt{a} - 3\sqrt{3} + 6\sqrt{b}$

ifadelerinin cem'i matlûbdur.

Bunlar şöylece yazılıp işaretleri ve müşâbehetleri mûcibince ıslah edildikte:

$$8\sqrt{a} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{b} + 9\sqrt{a} - 3\sqrt{3} + 6\sqrt{b} = 17\sqrt{a} + 2\sqrt{3}$$

âtîdeki misalde, meczûrlar madrûbata ayrılarak muntak olanlar cezrin hâricine çıkarılır ve sonra muamele icra kılınır. Yani şöyle yapılır:

$$2\sqrt{28} + 5\sqrt{45} - \sqrt{63} + 3\sqrt{20} =$$

$$2\sqrt{2^2.7} + 5\sqrt{3^2.5} - \sqrt{3^2.7} + 3\sqrt{2^2.5} =$$

$$4\sqrt{7} + 15\sqrt{5} - 3\sqrt{7} + 6\sqrt{5} = \sqrt{7} + 21\sqrt{5}$$

Kemmiyyât-ı asammenin tarhı için: Matrûhun işareti aksedilerek matrûhün-minhe katılır ve sonra cümlesinin birden cem‘-i cebrîsi alınır.

Mesela:

$$10\sqrt{3} + 2\sqrt{a} - 5\sqrt{3}'ten$$

$$8\sqrt{3} + 2\sqrt{a} - 6\sqrt{3}$$

ifadesini tarh etmek için şöyle yapmalıdır.

$$10\sqrt{3} + 2\sqrt{a} - 5\sqrt{3} - 8\sqrt{3} - 2\sqrt{a} + 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Darb: Yalnız cezriye üsleri müsâvî olursa işaretler işaretlerle ve emsaller emsallerle, meczûrlar da meczûrlarla darb olunur.

$$5\sqrt{7}.\sqrt{3}.8\sqrt{21} = 40\sqrt{21.21} = 40\sqrt{21^2} = 40.21 = 840$$

Taksîm: Keza yalnız cezriye üsleri müsâvî olursa meczûrlar yekdiğeriyle taksîm olunur.

$20\sqrt{17}$ ifadesini $8\sqrt{51}$ ifadesine taksîm etmek için şöyle yapmalıdır:

$$\frac{20\sqrt{17}}{8\sqrt{51}} = \frac{5\sqrt{17}}{2\sqrt{51}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{17}{51}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{5}{2.3}\sqrt{3} = \frac{5}{6}\sqrt{3}$$

21. Mahrecinde, kemmiyyât-ı asamme bulunan bir ifâde-i kesriyyenin ekseriya hesâbâtı daha basit, daha kolay bir halle ircâ için kesrin mahrecini muntak kılmak lazım gelir.

Mesela: $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ifadesinin kıymetini hesâb etmek lazım gelse, sûret-i zâhirede 2 adedini: $2.236067977\ldots$ adedine taksîm etmek icap eder.

Halbûki, bu ameliyat hem uzun sürer, hem de pek az mukni‘ bir netice verir. Burada kâsım için alınan aded: $\sqrt{5}$’in bir kıymet-i takrîbiyyesidir.

Lakin, eğer $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ifadesinin suretini ve mahrecini: $\sqrt{5}$ ile darb etmiş olsak kesrin kıymeti bozulmadığı gibi mahrec de muntak bir hâle gelir.

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Kezalik:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{11}-\sqrt{6}}$$

ifadesinin mahrecini muntak kılmak için mahrecin son haddinin işaretini tebdil ederek hem surete, hem de mahrece darb etmelidir. Yani şöyle yapmalıdır:

$$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{11}+\sqrt{6})}{(\sqrt{11}-\sqrt{6})(\sqrt{11}+\sqrt{6})} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{11}+\sqrt{6})}{11-6}$$
$$= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{11}+\sqrt{6})}{5}$$

***

22. Kemmiyyât-ı muhdese hesâbâtına dair kâide-i külliye: Bu bâbdaki kaide şöyle icmal edilir: “Kemmiyyât-i mevhûme hakkında da, kemmiyyât-ı hakîkaya ait, kavâid-i mu‘tâdeyi tatbik ediniz. Lakin şu: $\sqrt{-1}$ rumuzunu, murabba’ı: -1 olarak kabul ediniz ve öyle isti‘mâl eyleyiniz.

23. Kemmiyyât-ı muhdesenin a‘mâl-i erbaasına dair kavâid: Bu a‘mâl-i erbaa şu aşağıdaki ayniyetlerle irâe edilmiştir:

(1). $$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i,$$

(2). $$(a+bi)-(a'+b'i)=(a-a')+(b-b')i,$$

(3). $$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+ba')i,$$

(4). $$\frac{a+bi}{a'+b'i}=\frac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2}=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}-\frac{ab'-ba'}{a'^2+b'^2}i.$$

Şu yukarıki ayniyetler kavâid-i umûmiyyeyi icra ederek elde edilmiştir. Yalnız i^2 rumuzun yerine -1 alınmak şarttır. Taksîm ameliyatına gelince:

$$\frac{a+bi}{a'+b'i}$$

kesrinin her iki haddini: $a'-b'i$ ifadesiyle darb ettik ki, mahrec hakiki olsun. Bir de, görülüyorki, $a+bi$ şeklinde olan kemmiyyât-ı mevhûme üzerine icra edilen ameliyyât-ı ibtidâiyye, aynı eşkâlde kemmiyyât-ı mevhûme vücuda getiriyor.

24. Sıfıra müsâvî olan kemmiyyât-ı mevhûme: $a+bi$ gibi bir kemmiyyet-i mevhûme, a ile b sıfıra müsâvî olursa sıfırdır.

25. Bir kemmiyyet-i mevhûmenin modülü: Herhangi bir $a+bi$ kemmiyyet-i mevhûmesinin modülü: $\sqrt{a^2+b^2}$ ‘dir. Bedihidir ki, bir kemmiyyet-i mevhûmenin modülü sıfıra müsâvî olunca o kemmiyyet-i mevhûme de sıfır olur.

Not: 4

Bakınız kemmiyyât-ı mevhûmenin pek büyük bir faidesi de şu aşağıdaki ayniyetin vücuduna yardım etmesidir:

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}-i\sqrt{c^2+d^2}\right)^2 \equiv a^2+b^2-c^2-d^2-2i\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}+i\sqrt{c^2+d^2}\right)^2 \equiv a^2+b^2-c^2-d^2+2i\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \equiv (a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

Lakin bu son haddi [ki şudur: $4(a^2+b^2)(c^2+d^2)$] riyâzî-yi eşher (Euler)'in meşhur ayniyetine tatbik edelim:

(Euler)'in ayniyeti şudur:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \equiv (ac \pm bd)(ad \pm bc)$$

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \equiv (a^2+b^2-c^2-d^2)^2+(4ac \pm bd)^2+4(ad \pm bc)^2$$

Bu son ayniyete tatbîken başlıca şu:

$$x^2=y^2+u^2+v^2$$

şeklindeki muâdelât-ı gayr-i muayyenenin lâ-yuadd halleri bulunur.

İhtar: Ulûm-ı riyâziyyenin her bahsi için, müteaddit ve muhtelif emsile ve mesail halletmek kadar fikirleri tenvir edecek, zihinlere küşâyiş verecek hiçbir vasıta yoktur. Öyle kupkuru tarifattan, can sıkıcı tafsilattan o kadar çok faide beklemek abestir, kendini aldatmaktır. Ben, tam "kırk dokuz sene" –bilâ-fasıla- muallimlik mesleğinde bulundum ve el-ân da bulunmak şerefiyle mübâhîyim. Bu sözlerimi pek çok tecrübelere istinaden söylüyorum.

İşte, buna binaendir ki bu eserimin şu son sahifelerini, müteaddit ve muhtelif mesâil ve emseliye hasretmeyi ve bu vasıta ile zihinleri açmaya gayret eylemeyi vazife addettim.

Tatbikat / (Müteaddid ve Muhtelif Emsile ve Mesâil)

26. Numune olarak bir iki meseleyi ben halledeceğim.

Misal: $5x + 7y = 29 \ldots (1)$

muâdele-i gayr-i muayyenesini a'dâd-ı tâmme olarak halletmek matlûb? Bu gayr-i muayyen, (Diyofant) muâdelesini üç muhtelif surette halledeceğiz.

1^0. Taksîmât-ı mütevâliye tarîki:

(1) muâdelesinde x meçhulünü halledelim:

$$x = \frac{29 - y}{5}$$

olup bu muâdelenin sağ tarafındaki ifadenin suretini mahreci üzerine en küçük emsalleri alarak, taksîm edelim:

$$x = 5 - y + \frac{4 - 2y}{5} \quad \ldots (2)$$

olur. Lakin x aded-i tâm olacağından $\frac{4-2y}{5}$ ifadesinin de tam olması zaruridir. Bunun için p bir aded-i tâm irâe etmek şartıyla:

$$\frac{4 - 2y}{5} = p$$

farz ederiz.

Bundan y gayr-i muayyenini hallederek:

$$y = \frac{4 - 5p}{2}$$

olup taksîm ameli icra edilerek:

$$y = 2 - 2p - \frac{p}{2} \quad \dots\ (3)$$

olur. Lakin y'nin de tam olarak kıymet alması zaruridir.

Bu hâlde, S bir aded-i tâm olmak üzere:

$$\frac{p}{2} = S$$

farz olunarak:

$$p = 2S$$

elde edilir.

Şimdi, artık kesir hâlinde hiçbir ifade kalmadığından müsâvîler, (3) münasebetinde mahallerine vaz' edilirse:

$$y = 2 - 4S - S = 2 - 5S$$

olup, bu da (2) münasebetinde mahalline vaz' edilirse:

$$x = 3 + 7S$$

elde edilir ki, muâdele bu suretle halledilmiş olur.

Not: 5 / Küsûrât-ı Mütevâliye Temrinatı

27. $\frac{a}{b}$ şeklinde, müşterekü'l-mîzân bir kemmiyyetin küsûrât-ı mütevâliyyeye tevsî'i şu suretle de icra edilebilir.

Mesela $\frac{251}{764}$ kesrini mütevâli kesre tevsî' etmek için 251 ile 764 adedlerinin kâsım-ı müşterek-i a'zamlarını bulmak için yapılan (algoritma)yı icra etmelidir; yani şöyle yapmalıdır:

251	0	3	22	1	4	2	
	764	251	11	9	2	1	...A
251	11	9	2	1	0		

Bunlardan şu kesr-i mütevâlî tahaddüs eder:

$$\frac{251}{764}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}}\ldots(B)$$

Bilakis, B münâsebâtı malum iken $\frac{251}{764}$ kesrinin muhtelif ve müteaddid takribî kıymetlerini veren küsûrât-ı mürcia'yı hesâb etmek matlûb ise, (A) münâsebâtından şu (algoritma) tertip olunarak hesâb olunur:

	0	3	22	1	4	2
$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{22}{67}$	$\frac{23}{70}$	$\frac{114}{347}$	$\frac{251}{764}$

İşte burada

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{22}{67}, \quad \frac{23}{70}, \quad \frac{114}{347}$$

kesirlerinden beheri: $\frac{251}{764}$ kesrinin takribî kıymetleridir.

28. $\sqrt{40}$ kemmiyyetinin kesr-i mütevâliye tevsî‘i matlûb? Bunun için, uzun uzun ameliyata hacet kalmamak üzere, (Madde 68)de zikir ve ispat edilen gayet basit bir kanun mûcibince hareket edilerek şöylece tevsî‘e devam olunur:

$$\sqrt{40} = 6 + \frac{1}{x}$$

$$\frac{\sqrt{40}+6}{4} = 3 + \frac{1}{x'}$$

$$\frac{\sqrt{40}+6}{1} = 12 + \frac{1}{x''}$$

$$\frac{\sqrt{40}+6}{4} = 3 + \frac{1}{x'''}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$6: \; 3, \;\; 12; \;\; 3, \;\; 12; \;\; 3, \;\; 12; \; \ldots$$

Burada görülüyor ki, 6 adedinden sonra, 3, 12 adedleri tekerrür ederek devri teşkil ediyorlar. Bu hâlde matlûb tevsî‘ şudur:

$$\sqrt{40} = 6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{12 + \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + \end{matrix}}}}}$$

Bundan da şu küsûrât-ı mürcia‘ elde edilir:

	6	3	12	3	12	...
$\frac{1}{0}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{234}{37}$	$\frac{721}{114}$	$\frac{8886}{1405}$	

Bu küsûrât-ı mürcia‘nın birçok havâssı varsa da en meşhur olan bir tanesini zikredeceğiz:

$$p^2 = Aq^2 = \pm 1$$

muâdele-i gayr-i muayyenesine: (Pell) muâdelesi derler ki, a‘le’l-husûs (hesâb-ı a’lâda) da pek büyük ehemmiyeti vardır. Vakıa ben, bu muâdeleyi (Gauss) nam riyâzî-yi şehîrin vaz‘ ettiği kavâide tatbiken halledersem de, bu, kemmiyyât-ı asammenin küsûrât-ı mütevâliyeye tevsî‘i hallinde husûle gelen küsûrât-ı mürcia‘ vasıtasıyla da halledilir.

Yukarda $\sqrt{40}$ kemmiyyetini kesr-i mütevâliye tevsî‘ etmiş ve bunun

$$3,\ \ 12; \quad 3, 12 \ldots$$

olarak devir ettiğini görmüş idik.

İşte, devredenlerin son adedinden evvel gelen adede tekâbül eden kesr-i mürcia‘nın sureti ile mahreci, (Pell) muâdelesini halle yegâne vasıtadır.

Şimdi deminki $\sqrt{40}$’ın kesr-i mütevâlîye tevsî‘inde bulduğumuz küsûrât-ı mürcia‘ şunlar idi:

	6	3	12	3	...
$\frac{1}{0}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{134}{37}$	$\frac{721}{114}$	

Burada devreden adedler: $3, 12$ ... adedleridir. Bu devrin son adedi: 12'dir. Bundan evvel gelen aded ise 3'tür. İşte bu üç adedine tekabül eden mürcia‘: $\frac{19}{3}$'dur.

Şimdi (Pell) muâdelesini yazalım:

$$p^2 = Aq^2 = \pm 1$$

Burada A, cezri alınan 40 adedidir yani $A = 40$'tır. 3 adedine tekâbül eden mürcia‘ da $\frac{19}{3}$ idi. Öyleyse:

$$q = 3\,, \quad p = 19$$

dur.

Yukardaki muâdelede müsâvîleri yerlerine koyalım:

$$\overline{19}^2 - 40.3^2 = +1$$

Yahut

$$361 - 360 = 1$$

olur. Burada dikkat olunacak madde şudur:

Eğer $\frac{19}{3}$ gibi alınan mürcia‘, $\frac{1}{0}$ mürcia‘-ı izâfiyyesinden itibaren tek hanede yani tek sırada ise – ki $\frac{19}{3}$ üçüncü hanede bulunmasıyla tek hanededir. $+1$ ve çift hanede ise -1 verir.

Şimdi, bu mühim maddeyi daha başka bir şekilde tarif ederek anlatalım.

Mesela, bir yerde:

$$x^2 - 28y^2 = 1 \ldots (k)$$

gibi bir muâdele-i gayr-i muayyeneye tesadüf etmiş olsak da bunun hallini murat eylesek, evvel-emirde $\sqrt{28}$ ifadesini küsûrât-ı mütevâliyeye şöylece tevsî' etmeliyiz:

$$\sqrt{28} = 5 + \frac{1}{x}$$

$$\frac{\sqrt{28}+5}{3} = 3 + \frac{1}{x'} \qquad \frac{\sqrt{28}+5}{3} = 3 + \cdots$$

$$\frac{\sqrt{28}+4}{4} = 2 + \frac{1}{x''} \qquad \frac{\sqrt{28}+4}{4} = 2 + \cdots$$

$$\frac{\sqrt{28}+4}{3} = 3 + \frac{1}{x'''} \qquad \frac{\sqrt{28}+4}{3} = 3 + \cdots$$

$$\frac{\sqrt{28}+5}{1} = 10 + \frac{1}{x^{\iota v}} \qquad \frac{\sqrt{28}+5}{1} = 10 + \cdots$$

Sonra, bu tevsî'in devir etmeyen adedi ile devir eden bir takım (fakat bu takımın son rakamından sarf-ı nazar olunacaktır) alınarak malum olan algoritma yapılır. Bu algoritmanın son kesr-i mürcia'sı alınarak bu kesrin sureti (x)'in ve mahreci de (y)'nin müsâvîsi farz edilerek (k) muâdelesinde yerine konarak hall-i matlûb husûle gelmiş olur.

Yani şöyle yapmalıdır:

Burada devretmeyen 5 adediyle devredenin bir takımı (son rakamı müstesna) olan: $3, 2, 3$ adedleri alınır ve şu:

	5	3	2	3
$\frac{1}{0}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{37}{7}$	$\frac{127}{24}$

(algoritm) yapılır. Bunun son mürcia‘sından şu:

$$\overline{127}^2 - 24^2.28 = 16129 - 16128 = 1$$

olup muâdele halledilmiş olur.

Halleri Matlûb Mesâil

Mesele 1:

$$x^2 - 53y^2 = -1$$

muâdelesinde x ile y meçhullerinin cezirlerini bulmak matlûb?

Cevap:

$$x = 182 \quad ve \quad y = 25$$

Mesele 2:

$$p^2 - 3q^2 = 1$$

p ile q’nun cezirleri matlûb?

Cevap:

$$p = 2 \quad ve \quad q = 1$$

Mesele 3:

$$27x - 19y = 43$$

muâdele-i gayr-i muayyenesinin küsûrât-ı mütevâliye ile halli matlûbdur?

Cevap:

$$\left.\begin{aligned} x &= 19t - 16 \\ y &= 27t - 15 \end{aligned}\right\}$$

Yahut:

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 + 19t \\ y &= 2 + 27t \end{aligned}\right\}$$

Not:6 / A'dâd-ı Takrîbiyye Hesâbâtı

29. Tarif: Müşterekü'l-mikyâs bir adedin bir aded-i tâmla hâsıl-ı darbına, o adedin misli derler.

Misal: $\frac{15}{7}$ adedi, $\frac{3}{7}$ adedinin mislidir. Zîra:

$$\frac{15}{7} = \frac{3}{7} \times 5$$

tir.

Bu tarif a'dâd-ı tâmmeye da şamildir.

Mesela, 48 adedi, 12 adedinin mislidir. Çünkü,

$$4.12 = 48$$

dir.

30. Tarif: $\frac{p}{q}$ müşterekü'l-mikyâs malum bir aded farz olunsa, müşterekü'l-mikyâs iki adedin $\frac{p}{q}$'ya karîb hâric-i kısmeti, sûret-i münâsebette, yani sırasıyla, tertip olmuş $\frac{p}{q}$ adedinin misilleri arasında hâric-i kısmet-i hakîkîsi dâhil en büyük mislidir.

Mesela, A ile B müşterekü'l-mikyâs iki aded ve bunların hâric-i kısmet-i hakîkîsi $\frac{A}{B}$ olsun.

Şimdi, bu hâric-i kısmeti şu aşağıdaki silsilenin muhtelif adedleriyle mukayese edelim:

$$\frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, \frac{3p}{q}, \frac{4p}{q} \ldots$$

Bu silsile, $\frac{p}{q}$'nun misillerinden müteşekkil olup nâ-mütenâhî tezayüd ederek gidebilir. Mademki bu silsile, p aded-i tâmmının, sırasıyla bütün misillerini hâvî olarak lâ-yetenâhî tezayüd edebilmektedir. Mukayesemizde yalnız iki faraziyeye tesadüf edebiliriz.

Faraziyelerden biri: ya $\frac{A}{B}$, bu silsilenin $\frac{ap}{q}$ gibi bir adedinin aynıdır. Yani bu adede müsâvîdir veyahut $\frac{A}{B}$, bu silsilenin $\frac{ap}{q}$ ile $(a+1)\frac{p}{q}$ gibi iki aded-i müteâkibi arasında bulunur.

$\frac{ap}{q}$ adedi, her iki hâlde de, $\frac{A}{B}$ hâric-i kısmet-i hakîkîsinde dâhil $\frac{ap}{q}$'nin en yüksek misli olduğundan sûret-i kat'iyyede şu münasebâtla gösterilebilir:

$$\frac{ap}{q} \leq \frac{A}{B} < \frac{(a+1)p}{q} \quad \ldots (f)$$

31. Tenbih: $\frac{ap}{q}$ adedi, $\frac{A}{B}$ adedinden $\frac{p}{q}$'ya karîb bir miktarda fark ettiğinden A ile B adedlerinin hâric-i kısmet-i hakîkîsine $\frac{p}{q}$'ye yakın takarrüb etmiş oluyor. Şuna dikkat edelim ki, eğer

$$\frac{ap}{q} = \frac{A}{B}$$

münasebeti husûle gelirse $\frac{p}{q}$'ye karîb olan A ile B adedlerinin hâric-i kısmet-i hakîkîsi $\frac{ap}{q}$'den ibaret olmuş olur.

Müşterekü'l-Mikyâs İki Adedin *p/q*'ya Karîb Hâric-i Kısmetinin Taharrîsi

30. A ile B müşterekü'l-mikyâs iki aded-i ma'lûm, farz olunsun.

Şimdi,

$$\frac{ap}{q} \leq \frac{A}{B} < \frac{(a+1)p}{q}$$

münâsebâtına merbût $\frac{ap}{q}$ adedini tayin etmek matlûbdur.

Biliyoruz ki, $\frac{p}{q}$ adedi bi'l-farz, malum olduğundan, $\frac{ap}{q}$ adedinin taayyün etmesi a aded-i tâmmının bilinmesine vabestedir.

a adedini tanıdığımız gibi, bu adedi $\frac{p}{q}$ ile darb ederiz. Bu vasıta ile taharrî olunan takrîbi hâric-i kısmeti bulmuş oluruz.

31. Da'vâ-yı Nazarî: $\frac{p}{q}$'nun ma'kûsu olan $\frac{q}{p}$ ile $\frac{A}{B}$ darb edilerek husûle gelen $\frac{Aq}{Bp}$ adedinde dâhil en büyük aded-i tâm, a'nın müsâvîsidir.

Zîrâ, yukarda:

$$\frac{ap}{q} \leq \frac{A}{B} < \frac{(a+1)p}{q}$$

münasebetini elde etmiştik. Eğer,

$$\frac{ap}{q}, \frac{A}{B}, \frac{(a+1)p}{q}$$

üç adedini $\frac{q}{p}$ ile darb edecek olsak bu üç hâsıl-ı darb ki şunlardır:

$$a, \quad \frac{Aq}{Bp}, \quad a+1$$

Yine aynı münâsebâtı muhafaza etmiş oluruz. Öyleyse şu münâsebât

$$a \leq \frac{Aq}{Bp} < a+1$$

husûle gelir ki matlûb da sabit olur.

Hatâ-yı Mutlak

32. Tarif: Bir aded diğer bir adede nazaran aded-i hakîkîdir denir; eğer ikinci aded birincinin takribîsi ise.

33. Hatâ-yı Mutlak: Fazlasıyla veya noksanıyla takarrüb etmiş bir kemmiyyetin (l'errenr absolue – hatâ-yı mutlak)ı, bu kemmiyyet ile kemmiyyet-i hakîkiyye arasındaki tefâzuldür.

Bu takdirce 60 adedinin birer kıymet-i takarrubiyyesi tasavvur olunan 66 veya 54 adedlerinin hatâ-yı mutlakı 6 adedidir.

Eğer aded-i takrîbî, aded-i hakîkîden küçük ise, hata: noksanına, aksi takdirde fazlasınadır denir.

Yukarıki misalde 60 adedinin takrîbîlerinden 54 adedi noksanına, 66 adedi de fazlasına hatadır veya umumiyetle a ile bir aded-i takrîbîyi, A ile aded-i hakîkîyi ve α ile de hatâ-yı mutlakı irâe eylesek, eğer bu hata noksanına ise:

$$A = a + \alpha$$

Ve eğer fazlasına ise:

$$A = a - \alpha$$

münasebetleri husûle gelir.

Ekseriyetle vukua gelir ki, hata da, aded-i hakîkî de meçhul olur; yalnız hatanın kendisinden dûn olacak bir aded biliriz ki buna: (gâye-i ulyâ) denir.

Mesela, bir tûlün santimetreye münkasım bir cetvel tahtasıyla ölçülmesini tasavvur edelim ve tûlün ucunun iki taksîmat arasına tesadüf ettiğini farz edelim.

Bu hâlde, santimetreyi vâhid-i kıyâsî itibar edeceksek, adedi 1 noksanına bir hata ile, yok vâhid-i kıyâsîyi metre farz edersek, $0,01$ noksanına bir hata ile almış oluruz.

İşte burada hatâ-yı ulyâ -metre vâhid-i kıyâsî olduğuna göre- $\frac{1}{100}$'dür.

Umumiyetle farz edeceğiz ki bir hatanın gâye-i ulyâsı şu: $\frac{1}{10^n}$ şeklindedir.

İhtar: Bu hesâbât-ı takrîbiyye bahsi büyük bir bahistir. Bunun için ayrıca, başlı başına kitaplar yazılmıştır. Bizim buradaki tafsilatımız programımız mûcibince kâfidir. Yalnız tatbikata geçeceğiz ki tefhîm-i merâma, tenvîr-i efkâra büyük faidesi vardır.

Muhtasar Darb Ameliyatı

34. Darb-ı muhtasarı tariften evvel, onun kolayca anlaşılması için, darb amelini, dârıbın en yüksek mertebesindeki rakamından bed' ile icra edeceğiz ki bu ameliyat, darb-ı muhtasar hakkında bir fikr-i mahsûs verecektir.

Mesela, 6,5432 adedini, 7,8542 adediyle darb etmek matlûb olsa ki bunun netîce-i hakîkiyyesi 51,39160144'tür ve bunu da yüzde bire yakın almak isteniyorsa, bu hâlde hesâba, hâsıl-ı darb-ı cüz'îlerden husûle gelen, 0,00160144 kısmını katmazsınız. Çünkü matlûb yalnız şu: 51.39 hâsılını elde etmek idi.

Şimdi, darb ameliyatını, şu vech ile icra etmek lazımdır ki hangi rakamda tevakkuf etmek icap ediyorsa o rakamın dûn mertebesindeki rakamlardan teşekkül edecek hâsıl-ı darb-ı cüz'îleri kâle almayıp hazf etmektir.

Fikirleri iyice tespit için, evvelce mevzu bahis olan darb ameliyatını cari olan usulün aksine icra edelim, yani dârıbın sol tarafındaki rakamdan başlayalım. Şöyle yapalım:[25]

```
  6.5432
  7.8542
-----------
 45.8024
  5.23456
    327160
     261728
       130864
-----------
 51.39160144
```

[25] Bu darb amelini icra ederken, dârıbı zihnen şu şekilde farz ederek icrâ-yı amel etmelidir:

$$2 + 40 + 500 + 8000 + 70000$$

Burada nazar-ı dikkate alınacak yalnız sıfırlardır ki hâsıl-ı darb-ı cüz'îlerin âhâd mertebelerinin sırasını göstermeye yardım eder.

Şimdi, hâsıl-ı darb-ı matlûbun âtîdeki hâsıl-ı darb-ı cüz'îleri mecmûundan başka bir şey olmadıklarını tasavvur edelim:

$$
\begin{array}{r}
45{,}80 \\
5{,}23 \\
32 \\
2 \\
\hline
51{,}37
\end{array}
$$

Bu hâsıl-ı darba binde birler mertebelerinden husûle gelen elde birler – ki burada 2'dir – zam edilirse: 51.39 hâsıl-ı darb-ı matlûbuna muvaffak olunur.

Burada, mademki binde birlerden küçük olan hâsıl-ı darb-ı cüz'îler alınmıyor, esnâ-yı ameliyatta bunlardan sarf-ı nazar olunabilir; yalnız binde birler mertebelerindeki eldelerden istifade edilmeli, yani bunlar alınacak hâsıl-ı darb-ı cüz'îlere zam olunmalıdır.

Şöylece icrâ-yı amel olunmalıdır.

6.5 432	
7.8 542	
4 5.802	65432 ile 7'nin hâsıl-ı darbı
5.234	6543 ile 8'in hâsıl-ı darbı
327	654 ile 5'in hâsıl-ı darbı
26	65 ile 4'ün hâsıl-ı darbı
1	6 ile 2'nin hâsıl-ı darbı
5 1.390	

Darb ameliyatına şöylece başlanıp devam olunacak: Dârıbın en yüksek rakamı olan 7 ile madrûb tamamen darb olunacak. Yalnız şuna dikkat edilmeli: Hâsıl-ı darbı yüze karîb almak matlûb olunduğundan, 7'yi 2 ile darb ederek 14'ten hiçbirini yazmamalı; yalnız elde var 1 demeli ve 3 kere 7, 21 edip buna vâhidi zam ederek 22 dedikten sonra 2'yi hatt-ı ufkî altına yazmalı. Bundan sonra bildiğimiz tarzda darba devam ederek birinci hâsıl-ı darb-ı cüz'î olan 45802'yi husûle getirmelidir. Bu hâsıl-ı darb-ı cüz'î yazıldıktan sonra, ikinci hâsıl-ı darb-ı cüz'îyi teşkil etmelidir. Lakin bunda yalnız üç rakamdan ibaret olan 654 adedini nazar-ı dikkate alarak 4'ten sonra gelen 3 adedinin yalnız 8 ile darbından hâsıl olan 24 adedinin ikisini elde var 2 diye 8 ile 4'ün hâsıl-ı darbı olan 32 adedine zam ederek husûle gelen 34'ün 4'ünü, birinci hâsıl-ı darb-ı cüz'înin âhâd mertebesi alt hizasına yazmalıdır. Ve bu minval üzere devam ederek ikinci hâsıl-ı darb-ı cüz'î olan 5234 adedi teşkil edilmiş olur.

Bundan sonra, madrûbun 4 rakamını zihnen hazf ederek kalan 65 adedini, dârıbın üçüncü rakamı olan 5 ile darb etmeli. Fakat yine hazf edilen 4 rakamının, 65'in 5 rakamıyla hâsıl-ı darbından tahaddüs eden elde 2 adedini dârıbın 5'i ile 65'in beşi ile hâsıl-ı darbı olan 25 adedine zam ile hâsıl olan 27 adedinin 7 rakamını evvelce bulunan iki hâsıl-ı darb cüz'înin âhâd mertebesi alt hizasına yazmalıdır. Ve 27 adedinin 2 rakamı elde itibarıyla sonra gelen hâsıl-ı darba zam olunmalıdır. İşte böylece devam edilerek üçüncü hâsıl-ı darb cüz'î olan 327 adedi teşkil edilmiş olur.

Bundan sonra, yine madrûbun 65 kısmından 5, zihnen hazf edilerek yalnız kalan 6 ile dârıbın 4 rakamı ile darb ve buna hazf edilen 5 ile 4'ün hâsıl-ı darbından elde iki zam olunarak husûle gelen 26 adedi de dördüncü hâsıl-ı darb-ı cüz'îyi teşkil etmiş olur.

Burada ameliyat bitmiş olacaktı. Çünkü madrûbun bütün rakamları kullanılmıştır. Hâlbuki dârıbın 2 rakamı daha kaldı ki hazf edilen 6 rakamına darb edilerek husûle gelen elde biri, hâsıl-ı darb-ı cüz'îlerin âhâd mertebeleri alt hizasına yazılarak ameliyata nihayet vermek için bütün bu hâsıl-ı darb-ı cüz'îler cem' olunur ve hâsıl-ı mecmûun bindeki rakamı hazf edilerek matlûb olan yüzde bire karîb 51,39 adedi elde edilmiş olur.

Tembih: Ameliyata soldan başlayıp sağa doğru hareket edileceğine, madrûbu dârıbın altına ma'kûs yazarak doğrudan doğruya ameliyata devam etmek mûcib-i sühûlettir.

İşte, şu tafsîlât-ı husûsiyye nazar-ı dikkate alınarak, darb-ı muhtasar için şu aşağıdaki kaide kolaylıkla anlaşılır:

35. Kaide: $(\frac{1}{10^n})$'ye karîb iki aded hâsıl-ı darbının kıymetlerinden birini bulmak için, dârıbın âhâd mertebesini işgal eden rakamı, madrûbun $(n+2)$'nci aşâr rakamı altına ve yine dârıbın aşerât rakamını, miât, … ilh. rakamlarını âhâd mertebesindeki rakamın sağ tarafına sırasıyla yazmalı; sonra, ondaları, yüzdeleri, … gösteren rakamları da sol tarafa kaydetmelidir. İşte böylece dârıbı, madrûbun altına ma'kûs olarak yazmış olduk.

Bundan sonra, dârıbın her rakamını, madrûbda üst tarafına gelen rakamla darbdan başlayarak ve sağdan sola giderek, darb amelini icra eylemelidir. Ve sonra, bu hâsıl-ı darb-ı cüz'îleri, birbiri altına, sağ taraftaki son rakamları bir hizada bir sütun teşkil etmek üzere yazıp bu hâsıl-ı darb-ı cüz'îleri cem' eylemeli.

Hâsılı, böylece husûle gelen mecmûun aşâr hanesinden $(n+2)$ erkâm-ı a'şâriyye tefrik edip virgülü oraya koymalı; böylece teşekkül etmiş adedin sağ tarafındaki son iki rakamı hazf edip kalan son rakama vâhid zam eylemelidir.

Bu kaidenin, iyice zapt edilmesi için âtîde birkaç misal tatbik edeceğiz:

Farz edelim ki,

$$74{,}632543926432 \quad ile \quad 314{,}159265358979$$

adedlerinin $\frac{1}{10^5}$'e karîb bir hata ile hâsıl-ı darblarının kıyem-i takrîbiyyelerinden birini bulmak matlûb olsun?

Evvel-emirde dârıbın âhâd mertebesindeki 4 rakamını,

$$\left.\begin{array}{r} 314159265358979 \\ 13462934523647 \end{array}\right\} \ldots (H)$$

Madrubun beşinci aşâr mertebesi rakamı olan 6'nın altına ve bunun sağ tarafına da dârıbın aşerât mertebesini işgal eden 7 rakamını yazarız; dârıbın sair erkâmını da 4'ün sol tarafına sırasıyla kaydederiz.

Bu hâlde (H) ile gösterilen tertibi vücuda getirmiş oluruz. Şimdi,

$$314159265$$

adedini 7 ile darb ederiz, şu:

$$2199114855$$

(1)'nci hâsıl-ı darb-ı cüz'îsini elde ederiz. Ve

$$31415926$$

adedini 4 ile darb ederiz, şu:

$$125663704$$

(2)'nci hâsıl-ı darb-ı cüz'îsini buluruz. Ve bu minval üzere devam ederek şu muhtelif hâsıl-ı darb-ı cüz'îleri husûle getiririrz:

$$\begin{array}{r} 2199114855 \\ 125663704 \\ 18849552 \\ 942477 \\ 62830 \\ 15705 \\ 1256 \\ 93 \\ 27 \end{array}$$

Bunları cem‘ edersek, şu:

$$2344650499$$

adedini buluruz.

Bu adedin – sağdan sola doğru – beş aşâr rakamını tefrik ederiz:

$$23446{,}50499'u$$

buluruz.

Hâsılı, bu son adedin son iki rakamını, hazf ve kalanın son rakamına vâhid zam edersek nihayet şu:

$$23446{,}505$$

adedini elde etmiş oluruz.

Misal 2: 4,5267892 ile 0,056748 adedinin 0,01 karîb hata ile hâsıl-ı darbını bulmak matlûbdur?

Tarif ettiğimiz kaide mûcibince adedler şöyle yazılıp darb ameliyatı icra edilir:

$$\begin{array}{r}
4.5267892 \\
8\ 47\ 6500 \\
\hline
2260 \\
270 \\
28 \\
\hline
0.2558
\end{array}$$

Son iki rakam hazf edilip kalan adedin son rakamı olan (5)e vâhid zam edilse 0,26 adedi, matlûb olan hâsıl-ı darbdan ibaret olur.

Misal 3: 47,63958625 adedi ile 0,0067 adedinin $\frac{1}{100}$'e karîb hâsıl-ı darbını bulmak matlûb?

Tarif ettiğimiz vech üzere, adedler şu aşağıdaki gibi yazılıp darb ameli icra edilir:

```
47.63958625
    7 6000
-----------
  2856
    329
-----------
0.3185
===========
```

Son iki rakam hazf olunup kalan adedin son rakamına vâhid zam olunursa 0,32 adedi talep edilen adedden ibaret olmuş olur.

Bundan evvel, (Sayfa 295[26] ve Madde 26)da, bir misali üç usul ile halledeceğimi vadetmiş ve yalnız bir usul, yani taksîmât-ı mütevâliye ile sûret-i halli beyan etmiş idim.

Şimdi burada, küsûrât-ı mütevâliyeyi bir daha gözden geçirdiğimiz için sıra diğer iki usulün beyanına gelmiştir.

Biz yine aynı muâdele olan:

$$5x + 7y = 29$$

münasebetini ele alalım da o iki usulü de buna tatbik edelim.

2^0 Tarîk: (Gauss)un müteâdilleri vasıtasıyla hall: Burada yukardaki farz olunan muâdeleyi şu:

$$5x \equiv 29 \quad (muaddil\ 7)$$

müteâdiline tahvil ederiz.

---

[26] Bu eserin Osmanlıca metnindeki 295. sayfasına atıf yapılmıştır. Madde 26 bu kitabın 328. sayfasındadır.

Müteâdilin sol tarafından 7 muaddilinin bir misli ve sağ tarafından da 5 misli tarh edildikte:

$$(5-7)x \equiv 29-35 \quad (muaddil\ 7)$$

Yahut:

$$-2x \equiv -6 \quad (muaddil\ 7)$$

Veyahut:

$$2x \equiv 6 \quad (muaddil\ 7)$$

Bu sebepten:

$$x \equiv 3 \quad (muaddil\ 7)$$

Veyahut:

$$x \equiv 3+7m$$

olup x'in müsâvîsi asıl muâdelede mahalline vaz' edildikte:

$$5.(3+7m)+7y=29$$

Yahut:

$$15+5.7m+7y=29$$

Veyahut:

$$5.7m+7y=14$$

olup tarafeyn-i muâdele (7) ile taksîm edilirse:

$$5m+y=2$$

Yahut:

$$y=2-5m$$

olur.

İhtar: Yukarıki müteâdili halletmek için muaddilin icap eden misillerini zam veya tarh suretiyle kullanmış olduk. Bu hususu ve buna ait daha bazı muameleler, yukarda [Madde 56]da beyan ve ispat edilmişti. Oraya müracaatla iş anlaşılır:

3^0 Tarîk: Muâdelede gayr-i muayyenlerin emsallerinin nispetini küsûrât-ı mütevâliyeye tevsî‘ ile halldir.

Burada emsallerin nispeti: $\frac{5}{7}$ veya: $\frac{7}{5}$’tir. Bu nispetlerden hangisi alınsa matlûba muvafık ise de sureti mahrecinden büyük olanı intihapta daha isabet edilmiş olur.

	1	2	2
7	5	2	1
2	1	0	

	1	2	2
$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$

Son iki mürcia‘nın çaprazlama hâsıl-ı darblarının tefâzulünü alırsak:

$$3.5 - 2.7 = +1 \quad \ldots (a)$$

olur.

Şimdi, asıl muâdele olan:

$$5x + 7y = 29$$

ifadesine bakarak (a) münasebetini tanzim edelim:

Evvelâ (a) münasebetini 29 ile darb edelim:

$$5.(3.29) + 7(-2.29) = 29$$

Bu münasebete dikkatle bakılırsa, görülür ki, 5, asıl muâdelede x'in emsali, 7 de y'nin emsalidir. Sağ tarafındaki 29 adedi de asıl muâdelenin sağındaki malum adedin aynıdır.

Öyle ise burada

$$\begin{Bmatrix} x = +3.29 \\ y = -2.29 \end{Bmatrix} \begin{matrix} = 87 \\ = -58 \end{matrix}$$

olmak zaruridir.

Burada x ve y'nin müsâvîlerinde bir eksiklik vardır. O da: x'in müsâvîsine $7m$ ve y'nin müsâvîsine de $5m$'nin zam edilmeleridir.

(130)uncu sayfanın nihayetlerinden bed' ile (131)inci sayfa[27] takip edilerek bu hususun ispatı anlaşılacağından, buna istinaden bu zamları ilave ederiz:

$$x = +3.29 + 7m$$

$$y = -2.29 - 5m$$

Veyahut:

$$\left.\begin{matrix} x = +87 + 7m \\ y = -58 - 5m \end{matrix}\right\} \dots (B)$$

Lakin x ve y gayr-i muayyenlerinin ilk kıymetleri daima modülden aşağı bulunmak iltizam eylediğinden, 87 adedi 7 modülüne taksîm edilirse hâric-i kısmet 12 olduğu tahakkuk edip burada $m = -12$ alınarak (B)de müsâvîsi mahalline vaz' edilse:

$$x = +87 - 12.7 = 87 - 84 = 3$$

[27] Bu eserin Osmanlıca metnindeki 300. ve 301. sayfalarına atıf yapılmıştır. Bu kısım bu kitabın 334. ve 335. sayfalarına denk gelmektedir.

$$y = -58 - 5 \times -12 = -58 + 60 = 2$$

Şimdi, muâdelenin asıl en küçük kıymetlerine göre şu suretler intihaba şayandır:

$$\begin{cases} x = 3 + 7m \\ y = 2 - 5m \end{cases}$$

Mesele: Bir adamda 2 kilogramlık, 5 kilogramlık, 20 kilogramlık veznlerden başka vezn yok. Hâlbuki 171 kilogramlık bir şey tartıp satacak; acaba kendinde mevcut bu üç cins veznlerden kaçar tane kullanmak icap ediyor?

Hall-i Mes'ele:

Alınması lazım gelen 20 kilogramlık veznlerin adedini x ile, 5 kilogramlık alınacakların adedini y ile, nihayet 2 kilogramlıkların adedini de z ile irâe eylesek, ber-mûcib-i mes'ele:

$$20x + 5y + 2z = 171$$

muâdelesi husûle gelir.

Bu muâdeleyi şöyle yazalım:

$$20x + 5y = 171 - 2z \quad \dots (h)$$

Bu muâdelenin sol tarafı, 5 ile kâbil-i taksîmdir. A'dâd-ı tâmme olarak muâdelenin halli için sağ tarafın da 5 ile kâbil-i taksîm olması zaruridir. Öyle ise:

$$171 - 2z \equiv 0 \quad (muaddil\ 5)$$

müteâdili husûle gelir. Bu müteâdil şöyle:

$$2z \equiv 171 \quad (muaddil\ 5)$$

yazılıp sağ taraftaki 171 adedini modülün mâ-dûnuna indirmek için bundan 5'in en yüksek mislini çıkaralım: bakiye 1 kalır. Bu hâlde müteâdil de şu surete inkılap eder:

$$2z \equiv 1 \quad (muaddil\ 5)$$

Bu müteâdilin sağ tarafına bir muaddil zam edelim:

$$2z \equiv 6 \quad (muaddil\ 5) \text{ olur.}$$

5 ile 2 mütebâyin olduğundan, müteâdilin her iki tarafını da (2) ile taksîm edelim:

$$z \equiv 3 \quad (muaddil\ 5) \text{ olur.}$$

Bu z'nin müsâvîsini (h) ile irâe olunan muâdelede mahalline koyup tarh amelini de icra edelim:

$$20x + 57 = 165$$

İşte, şimdi muâdelenin her haddi (5) ile kâbil-i taksîm olunduğundan taksîm edelim:

$$4x + y = 33 \quad \dots(k)$$

olur.

Bu son muâdeleyi, müteâdile tahvil edelim:

$$y \equiv 33 \quad (muaddil\ 4)$$

33'ten muaddilin 8 misli olan 32'yi tarh edelim:

$$y \equiv 1 \quad (muaddil\ 4)$$

olup y'nin bu müsâvîsini (k) muâdelesinde yerine vaz' edelim:

$$4x + 1 = 33$$

Yahut:

$$4x = 32$$

Yahut:

$$x = 8$$

olup mesele şu:

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

olarak halledilmiş olur ki asıl muâdelede bu müsâvîler mahallerine konsa, hakîkat-i hâl tezahür eder.

İhtar: Mesele gayr-i muayyen olduğundan lâ-yuadd haller bulunabilir. Mesela, evvelce:

$$z \equiv 3 \quad (muaddil\, 5)$$

ifadesini bulmuş idik. Bu müteâdil:

$$z = 3 + 5m$$

müsâvâtına tahvil olunabilir. Burada m harfine istenilen kıymet verilebilir. Yalnız m'nin kıymetiyle 5 darb edilip 3 de zam olunursa bu mecmû 171 adedini geçmemeli; çünkü o zaman, gayr-i muayyenlerden biri menfi olarak zuhur eder.

Eğer terazinin eşya gözüne de vezn koymak caiz ise o zaman buna da mesâğ vardır.

Halleri Matlûb Emsile ve Mesâil [28]

(1) [29] $0{,}7[7]x + 0{,}41y = 51{,}8[8]$

Cevap: Bu muâdele şöyle de yazılır:

$$\frac{7}{9}x + \frac{41}{100}y = 51 + \frac{8}{9} = \frac{467}{9}$$

Tarafeyn-i muâdele: 9.100 hâsıl-ı darbı ile darb olundukta:

$$700x + 369y = 46700$$

Yahut:

$$700x \equiv 46700 \quad (muaddil\ 369)$$

Yahut:

$$7x \equiv 467 \equiv 98 \quad (muaddil\ 369)$$

Yahut:

$$x \equiv 14 \quad (muaddil\ 369)$$

Bundan:

$$x = 14 + 369t$$

$$y = 100 - 700t$$

olup bunlardan:

$$\begin{cases} x = 14 \\ y = 100 \end{cases}$$

kıymetleri istihsal olunur.

---

[28] Bu misalleri ve meseleleri talebe kendileri halledecektir. Biz yalnız cevaplarını yazacağız. Bazılarında da bir dereceye kadar yardım edeceğiz.

[29] Burada [7] 0,7 parantezli 7 bu adedin devrettiğini ima eder. Yani şu: 0,777… muâdelenin sağ tarafındaki [8] de keza böyledir.

(2) $5.1[1]x - 412 + \frac{y}{4} = 0$

Cevap:

$$x = 9t$$

$$y = 1648 - 184t$$

$$t = 1, 2, 3, \dots, 8$$

$$x = 9, 181, 27, \dots, 72$$

$$y = 1464, 1280, 1096, \dots, 176$$

(3) $x - y = 6$

$x = y + 6$

Cevap:

$$y = 1, 2, 3, \dots$$

$$x = 7, 8, 9, \dots$$

(4) Bir aded bulunuz ki, 8 ile taksîm edilirse 3 bakiye ve 15 ile taksîm olunursa 7 bakiye versin?

Cevap: Meçhul olan aded x ile gösterilirse ber-mûcib-i suâl:

$$x \equiv 3 \quad (8) \text{ [30]}$$

$$x \equiv 7 \quad (15)$$

Cevap: Birinci müteâdilden:

$$x = 3 + 8m \quad \dots (k)$$

---

[30] Şöyle bir: $x \equiv a(p)$ müteâdilinde (p) muaddildir. Muhtasaran: $(muaddil\ p)$ yerine kullanılmıştır.

alınıp ikincide müsâvîsi mahalline konsa:

$$3 + 8m \equiv 7 \quad (15)$$

Bundan:

$$8m \equiv 4 \quad (15)$$

4 adedi (15) ile mütebâyin olduğundan tarafeyni 4 ile taksîm caizdir. Öyle yapalım:

$$2m \equiv 1 \quad (15)$$

Bundan:

$$2m \equiv 1 + 15 = 16 \quad (15)$$

Yahut:

$$m = 8 + 15t$$

m'nin müsâvîsi (k)'da mahalline konsa:

$$x = 3 + 8(8 + 15t)$$

olup halledildikte:

$$x = 67 + 120t$$

olur. Meseleye tevafuk eden adedler:

$$x = 67, 187, 307, 427, 547 \ldots$$

hesâbsızdır.

(5)

$$\frac{x}{3}, \frac{x-1}{7}, \frac{x-6}{10}$$

ifadelerini aded-i tâm kılacak surette x gayr-i muayyenini tayin etmek matlûb?

Cevap: Yukarıki ifadeler, a'dâd-ı tâmme farz edilen: e, e', e'' kemmiyyetlerine müsâvî olarak şöylece:

$$\frac{x}{3} = e$$

$$\frac{x-1}{7} = e'$$

$$\frac{x-6}{10} = e''$$

yazılır veyahut:

$$x \equiv 0 \quad (3)$$

$$x \equiv 1 \quad (7)$$

$$x \equiv 6 \quad (10)$$

olup gösterilen kavâid mûcibince halledilirse:

$$x = 36 + 210t$$

bulunur ki,

$$x = 36, 246, 456, \ldots$$

kıymetlerin en küçüğü 36 olmak şartıyla:

$$246, 456, \ldots$$

gibi daha nâ-mahdûd adedler meseleye tevafuk ederler.

(6)

$$\frac{x-1}{2}, \frac{x-2}{3}, \frac{x-3}{5}$$

ifadelerini a'dâd-ı tâmme kılacak surette x meçhulünün kıymetlerini tayin etmek matlûb?

Cevap:

$$x = 23 + 30t$$

(7)

$$\frac{x-16}{39}, \frac{x-27}{56}$$

ifadelerini a'dâd-ı tâmme kılacak surette x meçhulünün kıymetlerini bulmak matlûb?

Cevap:

$$x = 1147 + 2184t$$

(8)

$$\frac{x-3}{11}, \frac{x-5}{19}, \frac{x-10}{29}$$

Yukarıki şartlarla halli matlûb:

Cevap:

$$x = 4128 + 6061t$$

(9)

$$\frac{3x-10}{7}, \frac{11x+8}{17}, \frac{16x-1}{5}$$

Yukarıki şartlarla halli matlûb:

Cevap:

$$x = 211 + 595t$$

(10) $xy = 79 - (x + y)$

muâdelesinin, x ve y gayr-i muayyenlerinin a'dâd-ı tâmme olmak şartıyla halli matlûb?

Cevap: Bu muâdele şöyle yazılır:

$$xy + y = 79 - x$$

Bundan:

$$y = \frac{79 - x}{x + 1}$$

Veyahut:

$$y = -1 + \frac{80}{x + 1}$$

y aded-i tâm olacağından: $\frac{80}{x+1}$ ifadesinin tam olması şarttır. Bunun için $(x + 1)$in 80 adedinin, kâsımlarından birine müsâvî olması lazımdır.

80 adedinin kâsımları şunlardır:

$$1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80$$

Bu kâsımların beheri: $(x + 1)$e müsâvî farz edilerek:

$$y = -1 + \frac{80}{x + 1}$$

ifadesinden bütün x ile y'nin kıymetleri istihraç olunur. Şöyle:

$$x + 1 = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80.$$

$$x = 0, 1, 3, 4, 7, 9.$$

$$y = 79, 39, 19, 15, 9, 7.$$

Bundan sonra kıymetler ma'kûs olarak yani (x)in kıymetleri (y)nin kıymetlerine, (y)nin kıymetleri de (x)inkilere tahavvül ederek tezahür ediyor. Nasılki son kıymetler böyle gelmiştir.

Son kıymetlerden 9 adedi (x)in ve 7 adedi de (y)nindir. Hâlbuki bunun üst tarafına bakılırsa, bunun ma'kûsu görülür. Yani x'in kıymeti 7, (y)ninki 9'dur.

(11) Bir köylü, pazara yumurta götürüp satıyor; eğer yumurtalarını on beşer taneden satarsa kendisinde 4 yumurta kalıyor; yok eğer yumurtalarını on ikişerden satarsa kendisinde 10 yumurta kalıyor. Mevcut yumurtaları da 100'den ziyade, 200'den noksandır. Acaba kaç yumurtası varmış?

Bu gibi mesailin hallinde, evvel-emirde, gayr-i muayyenin kıymet-i asgariyyesi bulunur. Sonra meselenin icabı kadar modül, bulunan kıymet-i asgariyyeye zam olunarak mesele, tam halledilmiş olur.

Cevap: Meselenin icap ettirdiği müteâdiller şunlardır: (x) ile yumurtaların en küçük kıymeti farz edilir:

$$x \equiv 4 \quad (15)$$

$$x \equiv 10 \quad (12)$$

Birinciden:

$$x = 4 + 15m \ \ldots . (S)$$

olup, ikincide yerine vaz' edildikte:

$$4 + 15m \equiv 10 \quad (12)$$

olur; bundan:

$$3m \equiv 6 \quad (12)$$

Burada 3 ile 6 adedlerinin kâsım-ı müşterek-i a‘zamları olan (3) adedi modül (12)yi de taksîm ettiğinden cümlesini (3) ile taksîm edersek:

$$m \equiv 2 \quad (4)$$

olup bundan:

$$m = 2 + 4t$$

olur.

(S) ile irâe olunan müsâvâtta m’nin müsâvîsi mahalline konsa:

$$x = 4 + 15(2 + 4t)$$

olup, bundan:

$$x = 34 + 60t$$

olur. Meseleye tevafuk eden en küçük kıymet 34’tür. Buna (60) modülünün bir misli zam edilse 94 olur. Bu ise 100’den asgar olduğundan meseledeki şarta tevafuk etmiyor.

Muaddilin iki misli olan 120 adedini 34 adedine zam edersek:

$x = 154$ elde edilir ki matlûb olan 100’den büyük 200’den küçük kıymet de budur ve bu aded, (15) üzerine taksîm edilse bakiye: 4 olup (12) üzerine taksîm edilse bakiye: 10’dur ki mesele şerâitine tamamen muvafıktır.

Bu hâlde: Köylü pazara 154 yumurta getirmiş oluyor.

(12) Bir çocuk ceviz oynayıp kazandıktan sonra, bir köşeye çekilerek cevizlerini 13’erden istif ederse: 9 ceviz elinde kalıyor. 17’şerden istif yaparsa: 14 ceviz elinde kalıyor. Cevizin mecmûu da: 100’den ziyade, 400’den eksiktir. Acaba çocuğun kaç tane cevizi varmış?

Cevap: Meseleye tevafuk eden cevizlerin en küçük kıymeti x ile irâe olunsa, ber-mûcib-i suâl:

$$x \equiv 9 \quad (13)$$

$$x \equiv 14 \quad (17)$$

usulü vech üzere halledildikte:

$$x = 48 + 221t$$

İşte, meseleye tevafuk eden x'in en küçük kıymeti 48 olup matlûb olan kıymet-i hakîkiyye de:

$$48 + 221 = 269$$

dur. Çünkü muaddilin 2 misli olan 442 adedi 48 adedine zam edilirse 400'ü geçer, meseleye tevafuk etmez.

(13) Bir miralaydan alayının kuvveti sorulmuş; miralay şu cevabı vermiş: "Adamlarımla 5'er 5'er, 6'şar 6'şar, 7'şer 7'şer saflar tertip edersem, hiçbir kimse hariçte kalmıyor. Lakin 11'erden saflar teşkilinde 9 ve 13'er saflar tertibinde de 5 adam hariçte kalıyor."

Miralayın şu ifadesine göre, acaba mevcudu ne kadar imiş?

Cevap: Alayın mevcudu x farz olunsa, ber-mûcib-i mes'ele:

$$x \equiv 0 \quad (210) \quad [31]$$

$$x \equiv 9 \quad (11)$$

$$x \equiv 5 \quad (13)$$

[31] Bir aded: $5, 6, 7$ ile kâbil-i taksîm ise, onların misl-i müşterek-i asgarîleriyle de kâbil-i taksîmdir.
Bunların misl-i müşterek-i asgarîleri: 210'dur. Buna göre müteâdiller tertip olunur.

olur.

Bu müteâdiller halledildikte:

$$x = 1890$$

bulunur ki miralayın mevcudu bu imiş.

(14) Bir sarraf camekânındaki altınları 3'er 3'er sayar, nihayette 2 artar; 5'er 5'er sayarsa 1 artar; mevcudundan 6 lira sarf eder; bundan sonra: 7'şer 7'şer, 11'er 11'er sayar, her ikisinden de 3 lira elinde kalır. Acaba sarrafın kaç lirası varmış?

Cevap: Mevcut lirasının adedini x farz edersek, ber-mûcib-i mes'ele:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \quad (3) \\ x \equiv 1 \quad (5) \\ x \equiv 9 \quad (77) \end{cases}$$

müteâdiller tahaddüs eder.

Cevap:

$$x = 86 + 1155t.$$

Burada başka şart koşulmadığı için sarrafın şu:

$$x = 86, 1241, 2396 \ \ldots$$

kıymetlerden biri kadar mevcudu olmak lazım gelir.

$$N = 13xy45z \quad (15)$$

adedini 792 adedi tamamen taksîm ediyor. Acaba böyle olmak için, bu adedde dâhil x, y, z kemmiyyetleri hangi rakama müsâvî olmalıdır? [32]

Cevap:

$$792 = 8.9.11$$

madrûblarına ayrılır. Mademki N adedi 8 ile kâbil-i taksîmdir.

$$45z \equiv 0 \ (muaddil\ 8)$$

olmak lazımdır.

Bu hâlde $45z$ adedi 8 üzerine taksîm edilirse, anlaşılır ki z rakamı: 6'dan başka bir adede müsâvî olamaz. Bu hâlde $z = 6$'dır.

Bundan başka 9 adedi ve 11 adedi için şu münâsebâtın vücuduna ihtiyaç vardır:

$$1 + 3 + x + y + 4 + 5 + 6 \equiv 0 \quad (9)$$

$$6 + 4 + x + 1 - 5 - y - 3 \equiv 0 \quad (11)$$

Yahut, birinciden:

$$x + y + 19 \equiv 0 \quad (9)$$

Bundan:

$$x + y \equiv -1 \quad (9)$$

Ve ikinciden:

$$x - y \equiv -3 \ (11)$$

[32] Tahlîlât-ı gayri muayeneye ait mesâilden, kâbiliyyet-i taksîm mesâiline geçmekte ne faide var? Tabiatı taklid. Daima yek-âhenk şeylerden insana bıkkınlık gelir. Mütenevvi şeyler hoşa gider. Birazdan yine bu bahse rücû' edeceğiz.

olur.

Bundan başka $x + y$ mecmûunda: a'zamı

$$x + y = 18, \qquad y = 9, \qquad x = 9$$

olmak lazım geldiğinden:

$$x + y < 19$$

Kezalik kıymet-i mutlakaca:

$$x - y < 9$$

olmak zaruridir.

Bu takdirce:

$$x + y = 8$$

Yahut:

$$x + y = 17;$$

$$x - y = -3$$

Yahut:

$$x - y = 8;$$

Bu müsâvâttan anlaşılıyor ki

$$x, y \; ve \; x + y$$

aynı cinstendir. Öyle ise:

$$x + y = 8 \;\; ile \;\; x - y = 8$$

beraber giderek bundan:

$$x = 8 \;\; ve \;\; y = 0$$

$$x + y = 17 \quad ile \quad x - y = -3$$

beraber giderek bundan:

$$x = 7 \quad ve \quad y = 10$$

Bu ikinci münâsebât şâyân-ı kabûl değildir. Bu sebepten matlûb aded şu olmak lazım gelir:

$$1380456.$$

Sözlük

A

a‘dâd: sayılar

a‘dâd-ı âliye: transandant sayılar

a‘dâd-ı mevhûme: sanal sayılar

a‘dâd-ı muhdese: sanal sayılar

a‘dâd-ı mükemmele: mükemmel sayılar

a‘dâd-ı müsellesiye: üçgensel sayılar

a‘dâd-ı mütehâbbe: dost sayılar

a‘dâd-ı tabîiyye: doğal sayılar

a’dâd-ı tâmme: tam sayılar

aded-i aslî: asal sayı

adlâ‘: geometrik şekillerin kenarları

âhâd: birler

ahz: kabul etme

akvam-ı garbiye: batılı kavimler

âlâyiş: debdebe, tantana, gösteriş

a‘le’l-ekser: çok vakit, çokluk

a‘le’l-husûs: hele, hususiyle, en çok

alyâ: yüksek yer, yükseklik

a‘mâl-i erbaa: dört işlem

arz: en, genişlik

asamm: rasyonel

asgar: (daha, pek, çok, en) küçük

aşerât: onlar

âtî: önde, aşağıda

avdet: geri gelme, dönme, dönüş

ayniyet: özdeşlik

a‘zam: (daha, pek, çok, en) büyük

B

ba‘de: sonra

bâkî: artık, artan, fazla, geri kalan

bed’: başlama, başlayış

bedihi: açık olan, besbelli

behemehâl: herhâlde, elbette, mutlaka

beher: her, her bir, her biri

ber-mûcib: mûcibince, gereğince, uyarına göre

beyn: ara, aralık, arada, araya, arasında

bidayet: başlama, başlangıç

bilâ-bâkî: kalansız

bi'l-farz: farz ederek

bi'l-ispat: ispatı ile

bî-mana: anlamsız, manasız

C

cem': toplama

cevelân: dolaşma, dolanma, gezinme

cezr: kök

cezr-i murabba': karekök

D

darb: çarpma

darb-ı müşterek: ortak çarpan

da'vâ-yı nazarî: teorem

derç: sokma, arasına sıkıştırma; toplama, biriktirme

deruhde etmek: üstüne alma, yüklenme

dest-res olmak: ele geçirmek, elde etmek, erişmek

dı'f: iki katı

dıl': kenar

dühât: dâhîler

dûn: altta, aşağıda

E

ebâd-ı mütesâviye: eşit uzunluk

el-ân: şimdi, şimdiki hâlde, henüz, hâlâ, daha, bu ana kadar, şu anda

emsile: numuneler, örnekler

emsal: katsayı, kaç misli alınacağını bildiren sayı

erkâm: rakamlar

evvel-emirde: her şeyden evvel, işin başlangıcında

evzân: tartılar, ağırlıklar, ölçüler

F

fazl: fazla, ziyade, artık bâkî

ferd: tek, çift olmayan

fevâid-bahş: faydalı

fi'l-hakika: hakikatte, gerçekte

G

gaye: limit

gaye-i âlî: üst limit

gaye-i süflî: alt limit

gayr-i kâbil-i hall: çözümsüz

gayr-i kâbil-i ihtisar: sadeleşmeyen

gayr-i muayyen: belirsiz

gayr-i müsâvât: eşitsizlik

gayr-i müşterek'ül mikyas: eş ölçüsüz

H

hadd: oran veya denklem meydana getiren kısımlardan her biri, terim

hadd-i evvel: ilk terim

hâiz-i ehemmiyet: ehemmiyetli, önemli

hâmiş: mektubun altına ilave edilen yazı

hâric-i kısmet: bölüm

hâsıl-ı darb: çarpım

hassa: bir kimseye ya da bir şeye özel olan nitelik, kuvvet, güç

hatt-ı ufkî: yatay

havâss: hassalar, keyfiyetler

hâvî: ihtiva eden, içine alan, şâmil, kaplayan, toplayan

hazf: aradan çıkarma, çıkarılma, yok etme, silme, ortadan kaldırma, giderme, düşürme

hiyel: oyunlar, aldatmalar

hudûd: sınırlar

hutût: çizgiler

İ

ibdâl: birinin yerine diğerini getirme

ibtinâ': bir şeyin üzerine binâ etme, kurma, bir şeye dayanma

ictinâb: sakınma, çekinme, uzaklaşma

idhâl: dâhil etme, içeri sokma

ifrağ: kalıba dökme, şekillendirme, bir şekle sokma

ifrâr: firara mecbur etme, kaçırma, kaçırılma

ifraz: bir bütünden bir parça ayırma, ayırma, ayrılma

ihtisar: kısaltma, sözü, yazıyı kısaltma; sadeleştirme, basitleştirme

ihzâr: hazırlama, hazır etme, edilme

iktisâb: kazanma, edinme

ilâ-nihâye: sonuna kadar

ilm-i hesâb: aritmetik

ilh: ilâ-âhir sözünün kısaltması

ilka': telkin etme, ilham etme

iltizam: icap ettirme, gerektirme

imâle: meyl ettirme, bir tarafa eğme, yatırma

intihap: seçme, seçilme, seçim

iptidai: ilk ile ilgili, ilke mensup, ilk derecede

irâe: gösterme, tayin etme

irca: eski hâline çevirme, çevrilme, geri döndürme

irtifa: yükselme, yükseklik

istidlâl: bir delile dayanarak bir şeyden bir netice çıkarma, delil ile anlama

istihraç: çıkarma, çıkarılma, netice çıkarma

istihsal: hâsıl etme, meydana getirme, üretme, elde etme

istikraî: tümevarımsal

istilzam: gerektirme, gerekme

istintaç: netice, çıkarma, çıkarılma

ittihaz: kabul etme

K

kâbil-i taksîm: bölünebilir

kâffe: hep, bütün, cümle

kaide: esas, temel; kural; taban

kaim: dik

karîn-i kirâm: şerefli olanlar

kâsım: bölen

kâsım-ı müşterek-i a'zam: en büyük ortak bölen

kavâid: kaideler, usuller, kurallar

kaziye: iş, husus, madde, mesele; dâvâ; önerme; yardımcı teorem

kemmiyyet: sayı, nicelik

kesr-i âdî: bayağı kesir

kesr-i aşârî: ondalık kesir

keyfe-me'ttefak: nasıl rast gelirse, hangisi olursa

kezalik: keza, bu, bu da böyle

kıyem-i takrîbiyye: yaklaşık kıymetler, değerler

kutr: çap

küsûrât-ı mütekâribe: yaklaşık kesirler

küsûrât-ı mütemmime: tamamlayan kesirler

küsûrât-ı mütevâliye: zincir kesirler

küşâyiş: huzur, dinginlik

L

lâ-büdd: lazım, gerekli

lâ-yetenâhi: sonsuz, sonu bulunmaz

lâ-yuadd: sayılmaz, sayılamaz, pek çok

M

maada: -den başka

madrûb: çarpılan

madrûbat-ı asliyye: asal çarpan

mâ-dûn: alt, aşağı derece

mahdud: sınırlanmış, sınırlı

mâ-kabl: ön, öndeki, üstteki, geçmiş; bir şeyin kendinden evvel olanı

maksûm: bölünen

ma'kûs: evrik, ters

ma'lûmât: bilgi

matlûb: taleb edilen, istenilen, aranılan şey

matrûh: tarh edilmiş, çıkarılmış

matrûhün-minh: eksilen, kendisinden başka bir sayı çıkarılan

mebni: -den dolayı, -den ötürü

mecmûu: cem' olunmuş, toplanmış, bir araya getirilmiş

mecmûu-u cebriye: cebirsel toplam

mecruh: cerh olunmuş, yaralanmış

meczûr: cezri, karekökü alınmış

mefrûz: farz kılınmış

merbut: rabt olunmuş, bağlanmış, bağlı

merfu': ref' olunmuş, kaldırılmış, yükseltilmiş

mertebe: derece, basamak

mesaha-i sathiye: yüzölçümü

mesâil: meseleler

meşâhir: ünlü kimseler

meşkûk: şüpheli

meşrûh: şerh olunmuş, açıklanmış, uzun uzadıya anlatılan

meşrut: şart koşulmuş, şartlı, şarta bağlı

meyan: orta, ara, aralık

mezbure: adı geçen, yukarda söylenmiş olan

miât: yüzler

miftâh: anahtar

minval: tarz, yol, suret, şekil

misl: benzer, kat

muaddil: müsavi ve beraber kılan, denkleştiren (mod)

muâdele: denklem

muâdele-i gayr-i muayyene: belirsiz denklem

muahharen: sonradan

muavene: yardım, yardım etme, yardımcı

mugâyir: aykırı, uymaz, başka türlü

muhâl: mümkün olmayan, olamaz, olmaz, olmayacak

muhasip: muhasebe, hesap işlerini iyi bilen

muhit-i daire: dairenin çevresi

mahrec: payda, âdî kesirde çizginin altındaki sayı

mukni': ikna eden, kanaat getiren, inandırıcı

muntak: rasyonel

murabba': kare

murakıb: denetçi, kontrolör

mustatîl: dikdörtgen

mu'tâde: adet olunmuş, alışılmış

mutasavver: tasavvur edilmiş, tasarlanmış, düşünülmüş

mu'terize: parantez

mübâhî: övünen

mübaşeret: bir işe başlama, girişme

mücmel: icmâl olunmuş, kısa ve az sözle anlatılmış, öz

mükâ'ab: küp

mülhem: ilham edilmiş

münafi: zıt, uymaz, aykırı

münavebeten: nöbet ile, nöbetleşerek

münkasım: bölünmüş

müntehi: nihayet bulan, sona eren, biten; son, en son; bir şeyi tamamlayan

mürcia': indirgen, redüktör

mürekkeb: bileşik

müsâvât: müsâvîlik, eşitlik

müsâvî: eşit, denk

müselles: üçgen

müstebân: meydanda, açıkta olan

müşabehet: benzeyiş, benzeme

müş'ir: iş'âr eden, haber veren, bildiren, gösterge, belirteç

müştehir: meşhur

müşterek'ül mikyas: ortak ölçülü

müşterek'ül-mizan: ortak ölçekli

müteaddit: çoğalan, çok, türlü türlü, birçok, birkaç

müteâdil: teâdül eden, birbirine denk gelen

müteakip: birbiri ardından gelen

mütebâkî: bâkî kalan, geri kalan, artan

mütebâyin: ortak bölenleri olmayan, aralarında asal

mütebâyineyn: ortak bölenleri olmayan iki sayı

mütehavvil: değişen, değişik, kararsız; değişken

mütenâkıs: gittikçe azalan, eksilen

mütenâzıran: simetrik olarak

mütevâli: birbiri ardınca giden, art arda gelen

mütevâzi'l-mustatîl: dikdörtgenler prizması

mütezayid: ziyadeleşen, çoğalan, artan

müzdeviç: eşlenik

N

nâkıs: noksan, eksik, tam olmayan; eksi

nâ-mahdud: hudutsuz, sınırsız

nâ-mütenâhî: sonsuz

nazariyye: teori

nısf: yarım, yarı

R

raci': geri dönen; münasebeti, ilgisi olan

ref': bir kuvvete yükseltme

reh-güzer: geçilen yol, yol üstü

re's: baş, kafa, tepe, uç, köşe

reviş: gidiş, hâl, tavır, tarz, üslup, tutum, yol

ric'iyye: ters yön, gerilek, geri giden

riyazi-i şehîr: ünlü matematikçi

riyaziyun: matematik âlimleri

rumuz: remizler, işaretler

rücû': dönme, geri dönme, cayma

S

salahiyyetli: yetkili

saniyen: ikinci derecede, ikinci olarak

sathi: yüzeysel

sehl: kolay

ser-name: mektup başlığı, bir taifenin başı

silsile: seri, dizi

silsile-i hendesiye: geometrik dizi

suret: pay

suret-i umumiye: genel hâl

suver: suretler

sübut bulmak: sabit olma, gerçekleşme, meydana çıkma

sühûlet: kolaylık

Ş

şâkirdan: öğrenciler

şakuli: *düşey*

şikâr: av

şuabât: şubeler, bölükler, kısımlar

şümullü: kapsamlı

T

taaddüt etmek: birden çok olma, çoğalma, sayısı artma

tâbi-i adedî: sayısal fonksiyon

ta'dâd: sayma, sayım

ta'dil: doğrultma, doğrulama, değişiklik

tahaddüs: ortaya çıkma, meydana çıkma

taharri: arama, araştırma, araştırılma, aratma

tahdid: sınır çizme, sınırlama

tahvil: değiştirme, değiştirilme, çevirme, döndürme

taht: alt, aşağı

takaddüm: önce gelme, öce davranma, ileri geçme, ileride bulunma

takarrüb: yaklaşma, yanaşma, vakti yakın olma

takarrür: sabit olmak, karar kılma

taksîm: bölme

taksîmât-ı mütevâliye: birbiri ardınca yapılan bölmeler

ta'mîm: umumileştirme

tarafeyn: iki taraf, yanlar

tarh: çıkarma

ta'rifât: tarifler

tavzih-i meram: maksadı açıklama

tayy: dürüp bükme, dürülüp bükülme, sarma, katlama; atlama, üzerinden geçme

teadül: beraberlik, denklik, birbirine denk gelme

tebeddül: değişme, başka hâle girme

tebeyyün: belli olma, anlaşılma, meydana çıkma

te'diye: ödeme, ödenilme, borcunu verme

tefâzul: fark, miktar fazlası

tefehhüm: yavaş yavaş anlama, farkına varma

tekmil: kemale erdirme, tamamlama, bitirme, bitirilme, tam, eksiksiz, bütün, hep

temdit: uzatma, uzatılma, sürdürme

temrinat: alıştırmalar

tenakus: azalma, eksilme

tenkis: azaltma, kısma, indirme, eksiltilme

tenvir-i ezhân: zihinlerin aydınlatılması

terekküp: karışıp birleşme, meydana gelme

terkîm: yazma

teshil: kolaylaştırma

tesmiye: ad koyma, adlandırma, isim verme

teşviş-i ezhân: zihinleri karıştırma

tevakki etmek: sakınma, çekinme, korunma

tevakkuf: durma, eğlenme, bekleme

tevsî': genişletme, genişletilme

tevzi': dağıtma, dağıtılma, üleştirme

tezahür: meydana çıkma, belirme

tezayüd: çoğalma, artma

tezyid: ziyadeleştirme, artırma

tûl: uzunluk, boy

U

ulûm-u hakikiye: hakiki bilimler

ulûm-u riyâziyye: matematik bilimleri

V

vâhid: tek, bir

vâhid-i kıyasî: birim

vasatî: orta, ortalama

vasi: geniş, açık, enli, bol

vaz‘ etmek: koymak

vâzıh: açık, meydanda, belli, kapalı olmayan

vech: yan, taraf, yüz, şekil

vehleten: birdenbire, ansızın

vezn: tartma, tartılma, tartı, ağırlık

Y

yekdiğer: birbirini, bir taraf öbür tarafı

Z

zâhirî: görünen, görünürdeki

zâid: artı

zam: katma, ekleme

zehab: gitme, bir fikre, düşünceye uyma; sapma

zevc: çift

zû-hudûd-u kesîre: çok terimli

Mehmet Nadir; matematik, eğitim, edebiyat ve siyaset gibi birçok alanla ilgilenmiş ve bunlarla ilgili gazete ve dergilerde pek çok yazı yazmış bir Osmanlı aydınıdır. Darülfünun Fen Fakültesi'nde Sayılar Teorisi kürsüsü profesörlüğü de yapmış olan Mehmet Nadir'in matematik çalışmalarının hemen tamamı sayılar teorisi alanında olup eserleriyle konuya orijinal katkılarda bulunmuştur.

Elinizdeki kitapta, Osmanlı Devletinin son dönem matematikçilerinden Mehmet Nadir'in (1856-1927) *Hesâb-ı Nazarî* adlı sayılar teorisi kitabının Latin harflerine transliterasyonu ve değerlendirmesi yer almaktadır.

Nadir'in *Hesâb-ı Nazarî* adlı kitabının, içerdiği konular ve konuların ele alınış biçimi bakımından Osmanlı topraklarında sayılar teorisi alanında bir örneğinin daha bulunmadığını söyleyebiliriz. Bu çalışma ile alanında uzman bir ilim adamı olan Mehmet Nadir ve onun değerli eseri ilim âleminin dikkatlerine sunulmaktadır.

TÜRK-İSLÂM BİLİM KÜLTÜR MİRASI DİZİSİ 32

TÜBA
TÜRKİYE BİLİMLER AKADEMİSİ

ISBN: 978-605-2249-63-5
9 786052 249635