

**İKLİM DEĞİŞİKLİĞİNİN İÇSU EKOSİSTEMLERİ
VE
SULAK ALANLAR ÜZERİNDEKİ ETKİLERİNİN
ANALİZİ İÇİN BİR MODEL ÖNERİSİ**

**PROPOSAL FOR A MODEL ANALYZING THE IMPACT OF
CLIMATE CHANGE ON INLAND AQUATIC AND WETLAND
ECOSYSTEMS**

Ali ERTÜRK

İKLİM DEĞİŞİKLİĞİNİN SULAK ALANLAR VE İÇSU EKOSİSTEMLERİ ÜZERİNDEKİ ETKİLERİNİN ANALİZİ İÇİN BİR MODEL ÖNERİSİ

Ali ERTÜRK

İstanbul Üniversitesi

Özet

İklim değişimi, son yıllarda etkisini önemli ölçüde hissettirmeye başlamış ve iklim değişikliğinin su kaynaklarına etkilerinin ortaya koyulması ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların çoğunluğunda öncelikli olarak su miktarlarındaki değişim üzerine odaklanılmış ve bu değişimler mümkün olduğunca sayısal olarak ortaya koyulmuştur. İklim değişiminin sulak alanlar ve içsu ekosistemlerine yıl içinde giren ortalama su miktarını ve su girdisinin mevsimlere göre dağılımını değiştirebileceğinden su ekosistemlerine önemli etkileri olması beklenmektedir. Havzalardan içsu ekosistemlerine giren su sıcaklığı ve kalitesinde değişimlerin de olması söz konusudur. Bununla birlikte hava sıcaklığındaki değişimler de su ekosistemlerinin su bütçesi ve su sıcaklığında değişimlere neden olarak su ekosistemlerini etkileyebilmektedir. Ekosistemlerdeki değişimler, ekosistemin dış etkenlere karşı tepkilerini de değiştireceğinden, mevcut veriler üzerinde yapılan regresyon analizi veya durağan zaman serisi analizi gibi istatistiksel yöntemler ile iklim değişiminin etkilerinin ortaya koyulmasında yetersiz kalacaktır. İklim değişimi sulak alanlar ve diğer içsu ekosistemleri için önemli bir baskı olabilmekle birlikte, su tüketimlerindeki değişimler (örneğin su çekimleri) ve sisteme ulaşan kirlenici yüklerindeki değişimler gibi başka baskıların da altındadırlar. Bu nedenle de su ekosistemlerinin doğru yönetilmeleri için küresel bir baskı olan iklim değişiminin ve çoğunlukla yerel olan diğer baskıların su ekosistemlerine etkilerini ayrı ayrı ortaya koyabilen hesap yöntemleri ve araçların geliştirilmesi önemlidir. Bu bölümde bu amaçla geliştirilecek simülasyon modellerinin nitelikleri ortaya koyulacak ve bu nitelikler dikkate alınarak iklim değişiminin sulak alan ve içsu ekosistemleri üzerindeki etkilerinin diğer baskıların varlığında ayrı olarak ortaya koyabilen analitik bir simülasyon modeli önerilecektir.

Anahtar Kelimeler

İçsu ekosistemleri, Sistem dinamiği, Simülasyon modelleri, Mekanizma tabanlı modeller, Analitik çözümler

PROPOSAL FOR A MODEL ANALYZING THE IMPACT OF CLIMATE CHANGE ON WETLAND AND INLAND AQUATIC ECOSYSTEMS

Ali ERTÜRK

Istanbul University

Abstract

Climate change has begun to make its impact felt significantly in recent years and many studies have been conducted to reveal the effects of climate change on water resources. The majority of these studies focused primarily on the change in the amount of water and these changes were put forward numerically as much as possible. Climate change is expected to have significant effects on aquatic ecosystems as it may change the average amount of water entering wetlands and inland water ecosystems throughout the year and the seasonal distribution of water input. There are also changes in the temperature and quality of the water entering the inland water ecosystems from the basins. However, changes in air temperature can also affect aquatic ecosystems by causing changes in the water budget and water temperature of aquatic ecosystems. Since changes in ecosystems will also change the ecosystem's responses to external factors, statistical methods such as regression analysis or stationary time series analysis on existing data will be insufficient to reveal the effects of climate change. While climate change can be a significant pressure for wetlands and other inland water ecosystems, they are also under other pressures, such as changes in water consumption (for example water withdrawals) and changes in pollutant loads reaching the system. For this reason, it is important to develop calculation methods and tools that can separately reveal the effects of climate change, which is a global pressure, and other mostly local pressures on aquatic ecosystems for the correct management of aquatic ecosystems. In this chapter, the characteristics of the simulation models to be developed for this purpose will be revealed and by taking into account these characteristics an analytical simulation model will be proposed that can separately reveal the effects of climate change on wetland and inland water ecosystems in the presence of other pressures, taking into account these features.

Keywords

Inland ecosystems, System dynamics, Simulation models, Mechanistic models, Analytical solutions

1. Giriş

İklim değişimi, son yıllarda etkisini önemli ölçüde hissettirmeye başlamış ve iklim değişikliğinin su kaynaklarına etkilerinin ortaya koyulması ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. McBean ve Motiee, (2008) gibi birçok çalışmada hidroloji esaslı olmaları nedeniyle öncelikli olarak su miktarlarındaki değişim üzerine odaklanılmış ve bu değişimler mümkün olduğunca sayısal olarak ortaya koyulmuştur.

İklim değişiminin sulak alanlar ve içsu ekosistemlerine yıl içinde giren ortalama su miktarını ve su girdisinin mevsimlere göre dağılımını değiştirebileceğinden su ekosistemlerine önemli etkileri olması beklenmektedir. Havzalardan içsu ekosistemlerine giren su sıcaklığı ve kalitesinde değişimlerin de olması söz konusudur. Bununla birlikte hava sıcaklığındaki değişimler de su ekosistemlerinin su bütçesi ve su sıcaklığında değişimlere neden olarak su ekosistemlerini etkileyebilmektedir. Ekosistemlerdeki değişimler, ekosistemin dış etkenlere karşı tepkilerini de değiştireceğinden, mevcut veriler üzerinde yapılan regresyon analizi veya durağan zaman serisi analizi gibi istatistiksel yöntemler ile iklim değişiminin etkilerinin ortaya koyulmasında yetersiz kalacaktır.

İklim değişimi sulak alanlar ve diğer içsu ekosistemleri için önemli bir baskı olabilmekle birlikte, su tüketimindeki değişimler (örneğin su çekimleri) ve sisteme ulaşan kirletici yüklerindeki değişimler gibi başka baskıların da altındadırlar. Bu nedenle de su ekosistemlerinin doğru yönetilmeleri için küresel bir baskı olan iklim değişiminin ve yoğunlukla yerel olan diğer baskıların su ekosistemlerine etkilerini ayrı ayrı ortaya koyabilen hesap yöntemleri ve araçların geliştirilmesi önemlidir.

Bu bölümde bu amaçla geliştirilecek simülasyon modellerinin nitelikleri ortaya koyulacak ve bu nitelikler dikkate alınarak iklim değişiminin sulak alan ve içsu ekosistemleri üzerindeki etkilerinin diğer baskıların varlığında ayrı olarak ortaya koyabilen analitik bir simülasyon modeli önerilecektir. Bölümde ayrıca önerilen analitik simülasyon modelinin hayata geçirilmesi ile ilgili uygulama örneklerine de yer verilecek ve değişik örneklerin girdi verisi ihtiyaçları üzerinde de durulacaktır.

Su kalitesi modellemenin ilk yıllarında bilgisayar teknolojisi olmadığı ya da bilgisayarlar kolay ulaşılabilir olmadıkları için geliştirilen modeller de elle ya da masaüstü hesap makineleri ile işlem yapılarak sonuç verecek yapıdaydılar. Streeter ve Phelps (1925) ve Vollenwieder (1975) gibi doğrudan uygulanmış eski modeller ve Thomann ve Mueller (1987), Chapra (2008) gibi öğretim amaçlı ders kitaplarında verilen bazı modeller bunlara örnektir. Bu modeller, ya analitik çözümlere dayanan (örneğin Streeter ve Phelps, 1925) ya da regresyon analizi sonucu elde

edilen (örneğin Vollenwieder, 1975) matematiksel ifadeler olduklarından, dış etkilerin sistemin verdiği yanıtın karşılığı olan su kalitesini bilgisayar teknolojisinin nispeten erişilebilir olduğu 1960'lı yılların sonundan itibaren ise model geliştiricileri tarafından hem analitik çözümlerin matematiksel zorluklarından kurtaran hem de analitik çözümlerin mümkün olmadığı çoğu gerçek durumda da uygulanabilir olan sayısal çözüm tekniklerine dayalı modeller kullanılmaya başlanmıştır. Bu modellerin tüm avantajlarına rağmen önemli dezavantajları vardır. Hem sayısal teknikler kullanılarak fonksiyonel çözümler elde etmemeleri hem de doğrusal olmayan yapıları nedeniyle odaklanılan su ekosisteminin girdileri ile çıktıları arasında kesintisiz bir çözüm vermemektedirler. Bu durum değişik etkenlerin su ekosistemleri üzerindeki bireysel etkilerinin doğrudan ortaya koyulmasını hemen hemen imkânsız hale getirmekte, dolaylı olarak ortaya koyulabilmeleri için de ileri sayısal tekniklerinin kullanılmasını gerektirmektedir.

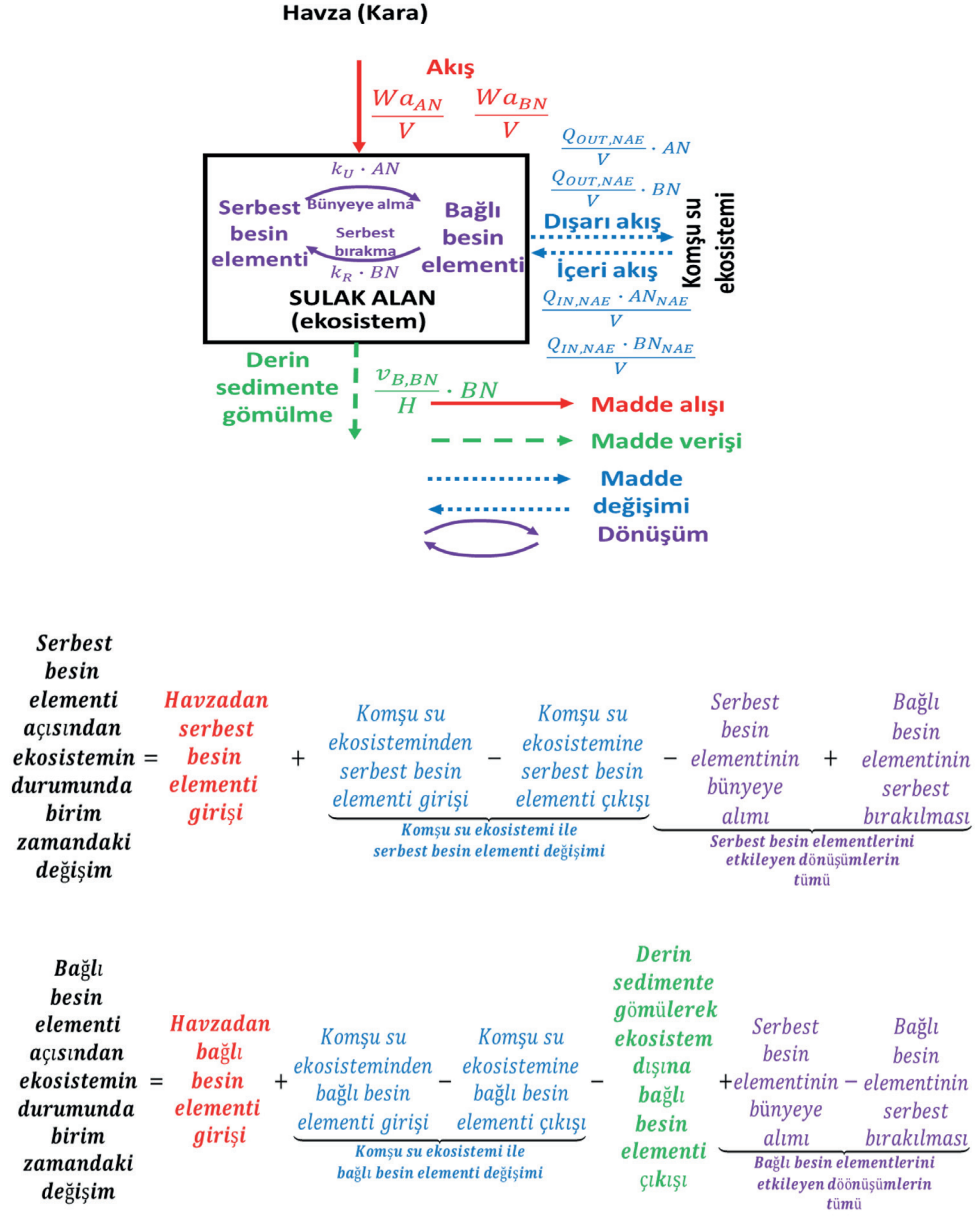
Bu bölümde, analitik çözümlerden esinlenilerek iklim değişikliği ve diğer etkenlerin su ekosistemlerine doğrudan etkilerini ortaya koyabilecek örnek modellerin yapıları üzerinde durulmuştur. Modeller sığ sulak alanlar için kurgulanmış olmakla birlikte, daha karmaşık yapıları su ekosistemlerine de uygulanmaları mümkündür.

2. Basit Bir Kütle Dengesi Modeli

Bu kısım; önerilen model yapısının mümkün olduğu kadar basit tanımlanan bir su ekosistemi için tüm ayrıntıları ile gösterilmesini amaçlamaktadır.

Örnek olarak verilen model kütle dengesine dayanan mekanizma ağırlıklı bir modeldir. Kütle dengesi, kütlenin korunumudur. Herhangi bir ekosisteme giren her atom madde (C, N, P gibi besin elementleri ya da kirleticiler) ya ekosistemin dışına taşınır ya da ekosistem içinde bir yerde bulunur. Ekosistem içindeki madde atom düzeyinde yok olmaz (atomlar ekosisteme girişteki orijinal moleküllerden farklı moleküllere geçebilir). Eğer söz konusu elementler besin elementleri ise, bu besin elementleri serbest (inorganik, çözünmüş, kullanılabilir) ya da bağlı (ölü organik maddeye bağlı ya da biyokütle içinde) durumda bulunabilirler.

Örnek olarak, bir sulak alan ekosisteminin kısıtlayıcı besin elementi üzerinden kurulan kütle dengesi verilmiştir. Ekosistem modeli kütle dengesi ile Şekil 1'de verilmektedir. Ekosistem konumsal olarak homojendir. Besin elementinin ise iki türü vardır. Serbest besin elementi (modelde AN ile gösterilmiştir) su ortamında bulunan ve birincil üreticiler tarafından doğrudan kullanılabilen besin elementi türüdür. Bağlı besin elementi ise (modelde BN ile gösterilmiştir) hem biyokütlerde bulunan hem de organik madde içeriğinde (ölü biyokütle ve çözünmüş organik madde) bağlı olarak bulunan besin elementini temsil etmektedir. Ekosistemler çevrelerinden madde alırlar, çevrelerine madde verirler ya da taşınım ile madde değiş tokuş ederler. Ekosistemler maddeleri dönüştürebilirler.



Şekil 2.1 Basitleştirilmiş bir su ekosistemi ve kütle dengesi bileşenleri

Serbest ve bağlı besin elementlerinin kütle dengelerinin matematiksel ifadeleri, sırasıyla Denklem 2.1 ve Denklem 2.2’de verilmiştir.

$$\frac{dAN}{dt} = \underbrace{\frac{Wa_{AN}}{V}}_{\text{Havzadan serbest besin elementi girişi}} + \underbrace{\frac{Q_{IN,NAE} \cdot AN_{NAE}}{V}}_{\text{Komşu su ekosisteminden serbest besin elementi girişi}} - \underbrace{\frac{Q_{OUT,NAE}}{V} \cdot AN}_{\text{Komşu su ekosistemine serbest besin elementi çıkışı}} - \underbrace{k_U \cdot AN}_{\text{Serbest besin elementinin bünyeye alınımı}} + \underbrace{k_R \cdot BN}_{\text{Bağlı besin elementinin serbest bırakılması}} \quad (\text{Denklem 2.1})$$

Komşu su ekosistemi ile serbest besin elementi değişimi

Serbest besin elementlerini etkileyen dönüşümlerin tümü

$$\frac{dBN}{dt} = \underbrace{\frac{Wa_{BN}}{V}}_{\text{Havzadan bağlı besin elementi girişi}} + \underbrace{\frac{Q_{IN,NAE} \cdot BN_{NAE}}{V}}_{\text{Komşu su ekosisteminden bağlı besin elementi girişi}} - \underbrace{\frac{Q_{OUT,NAE}}{V} \cdot BN}_{\text{Komşu su ekosistemine bağlı besin elementi çıkışı}} - \underbrace{\frac{v_{B,BN}}{H} \cdot BN}_{\text{Derin sedimente gömülerek ekosistem dışına bağlı besin elementi çıkışı}} + \underbrace{k_U \cdot AN}_{\text{Serbest besin elementinin bünyeye alınımı}} - \underbrace{k_R \cdot BN}_{\text{Bağlı besin elementlerini etkileyen dönüşümlerin tümü}} \quad (\text{Denklem 2.2})$$

Komşu su ekosistemi ile bağlı besin elementi değişimi

Bağlı besin elementlerini etkileyen dönüşümlerin tümü

Denklem 2.1 ve Denklem 2.2'deki ifadeler aşağıda verilmektedir.

- $AN(t)$: Birim hacimdeki ya da birim alandaki serbest besin elementi miktarı $[M \cdot L^{-3}]$
- $BN(t)$: Birim hacimdeki ya da birim alandaki bağlı besin elementi miktarı $[M \cdot L^{-3}]$
- t : Zaman $[T]$
- V : Hacim $[L^3]$
- H : Derinlik $[L]$
- Wa_{AN} : Kara kökenli serbest besin elementi yükü $[M \cdot T^{-1}]$
- Wa_{BN} : Kara kökenli serbest besin elementi yükü $[M \cdot T^{-1}]$
- $Q_{OUT, NAE}$: Komşu su ekosistemine çıkış akımı $[L^3 \cdot T^{-1}]$
- $Q_{OUT, NAE}$: Komşu su ekosisteminden giriş akımı $[L^3 \cdot T^{-1}]$
- AN_{NAE} : komşu su ekosistemindeki serbest besin elementi konsantrasyonu $[M \cdot L^{-3}]$
- BN_{NAE} : komşu su ekosistemindeki bağlı besin elementi konsantrasyonu $[M \cdot L^{-3}]$
- $V_{B, BN}$: Gömülme hızı $[L \cdot T^{-1}]$
- k_U : Serbest besin elementinin bünyeye alınma hızı sabiti $[T^{-1}]$
- k_R : Bağlı besin elementinin bırakılma hızı sabiti $[T^{-1}]$

Denklem 2.1 ve Denklem 2.2 düzenlenerek Denklem 2.3 ve Denklem 2.4 elde edilir.

$$\frac{dAN}{dt} = -\underbrace{\left(\frac{Q_{OUT,NAE}}{V} + k_U\right)}_{a_{AN,AN}} \cdot AN + \underbrace{k_R}_{a_{AN,BN}} \cdot BN + \underbrace{\frac{W a_{AN}}{V} + \frac{Q_{IN,SEA} \cdot AN_{NAE}}{V}}_{W_{AN}} \quad (\text{Denklem 2.3})$$

$$\frac{dBN}{dt} = \underbrace{k_U}_{a_{BN,AN}} \cdot AN - \underbrace{\left(\frac{Q_{OUT,NAE}}{V} + \frac{v_{S,BN}}{H} + k_R\right)}_{a_{BN,BN}} \cdot BN + \underbrace{\frac{W a_{BN}}{V} + \frac{Q_{IN,NAE} \cdot BN_{NAE}}{V}}_{W_{BN}} \quad (\text{Denklem 2.4})$$

Denklem 2.3 ve Denklem 2.4'te verilen kısaltma tanımları $a_{AN,AN}$, $a_{AN,BN}$, $a_{BN,AN}$, $a_{BN,BN}$, W_{AN} ve W_{BN} kullanılarak elde edilen diferansiyel denklem takımı (Denklem 2.5 ve Denklem 2.6) matris biçiminde yazılarak Denklem 2.7 elde edilir.

$$\frac{dAN}{dt} = a_{AN,AN} \cdot AN + a_{AN,BN} \cdot BN + W_{AN} \quad (\text{Denklem 2.5})$$

$$\frac{dBN}{dt} = a_{BN,AN} \cdot AN + a_{BN,BN} \cdot BN + W_{BN} \quad (\text{Denklem 2.6})$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} AN \\ BN \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{AN,AN} & a_{AN,BN} \\ a_{BN,AN} & a_{BN,BN} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Ekosistemin dış etkilere} \\ \text{gösterdiği tepkisel davranışı} \\ \text{temsil eden tepki matrisi}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} AN \\ BN \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Ekosistemin} \\ \text{durumunu} \\ \text{temsil eden çözüm} \\ \text{vektörü}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} W_{AN} \\ W_{BN} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Ekosisteme olan} \\ \text{dış etkileri temsil} \\ \text{eden sabitler} \\ \text{vektörü}}} \quad (\text{Denklem 2.7})$$

Denklem 2.7 kararlı durum¹ için Denklem 2.8'e dönüşmektedir.

$$-\begin{bmatrix} a_{AN,AN} & a_{AN,BN} \\ a_{BN,AN} & a_{BN,BN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} AN \\ BN \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{AN} \\ W_{BN} \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem 2.8})$$

Çözümü ise, iki tarafın negatif tepki matrisinin tersi ile çarpılması ile elde edilir (Denklem 2.9).

$$\begin{bmatrix} AN \\ BN \end{bmatrix} = inv \left(-\begin{bmatrix} a_{AN,AN} & a_{AN,BN} \\ a_{BN,AN} & a_{BN,BN} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} W_{AN} \\ W_{BN} \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem 2.9})$$

Negatif tepki matrisinin tersinin elde edildiği Denklem 2.10'da verilmektedir.

¹ Bu terim çevre bilimleri ve mühendisliğinde zamana göre değişken olmayan dış etkenlerin yeterince uzun süre etkisi altında sistemin tepkisinin de zamana göre değişken olmadığı durum yerine kullanılmıştır. Modelleme jargonunda sistemin stabil olduğunu ifade eden kararlı durum ile bir ilişkisi yoktur.

(Denklem 2.10)

$$inv \left(- \begin{bmatrix} a_{AN,AN} & a_{AN,BN} \\ a_{BN,AN} & a_{BN,BN} \end{bmatrix} \right) = - \frac{\begin{bmatrix} a_{BN,BN} & -a_{AN,BN} \\ -a_{BN,AN} & a_{AN,AN} \end{bmatrix}}{\det \left(\begin{bmatrix} a_{AN,AN} & a_{AN,BN} \\ a_{BN,AN} & a_{BN,BN} \end{bmatrix} \right)} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-a_{BN,BN}}{a_{AN,AN} \cdot a_{BN,BN} - a_{AN,BN} \cdot a_{BN,AN}} & \frac{a_{AN,BN}}{a_{AN,AN} \cdot a_{BN,BN} - a_{AN,BN} \cdot a_{BN,AN}} \\ \frac{a_{BN,AN}}{a_{AN,AN} \cdot a_{BN,BN} - a_{AN,BN} \cdot a_{BN,AN}} & \frac{-a_{AN,AN}}{a_{AN,AN} \cdot a_{BN,BN} - a_{AN,BN} \cdot a_{BN,AN}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mia_{AN,AN} & mia_{AN,BN} \\ mia_{BN,AN} & mia_{BN,BN} \end{bmatrix}$$

Bu durumda serbest ve bağlı besin elementleri için elde edilecek çözümler Denklem 2.11 ve Denklem 2.12’de gösterildiği biçimdedir.

$$AN = mia_{AN,AN} \cdot W_{AN} + mia_{AN,BN} \cdot W_{BN} \quad (\text{Denklem 2.11})$$

$$BN = mia_{BN,AN} \cdot W_{AN} + mia_{BN,BN} \cdot W_{BN} \quad (\text{Denklem 2.12})$$

Denklem 2.11 ve Denklem 2.12’den de görüldüğü gibi sistem kararlı duruma ulaştığında serbest ve bağlı besin elementi konsantrasyonları ile temsil eden durumu yalnızca serbest ve bağlı besin elementi yükleri ile temsil edilen dış etkenlere bağlıdır. Sistem girdisi ve çıktısı arasındaki, bağlantı ise tepki matrisi tarafından sağlanmaktadır. Aynı denklemler, ekosistemin tepkisinin dış etkiler ile dengede olduğu duruma ulaştığını göstermektedir (Şekil 2.2). Şekilden de anlaşılabileceği gibi bu türdeki analitik modeller yalnızca sistemin durumunu temsil eden değişkenleri değil (bu modelde serbest ve bağlı besin elementi konsantrasyonları) değişkenler ile ilgili taşıyım ve dönüşüm proseslerinin bireysel katkılarını da ortaya koymaktadırlar.

$$\underbrace{\frac{W a_{AN}}{V} + \frac{Q_{IN,NAE} \cdot AN_{NAE}}{V}}_{\substack{\text{Havzadan} \\ \text{serbest} \\ \text{besin} \\ \text{elementi} \\ \text{girişi} \\ \text{EKOSİSTEME SERBEST BESİN ELEMENTİ} \\ \text{ÜZERİNDEN DIŞ ETKİ}}} = \underbrace{\frac{Q_{OUT,NAE}}{V} \cdot AN}_{\substack{\text{Komşu su} \\ \text{ekosistemine} \\ \text{serbest besin} \\ \text{elementi} \\ \text{çıkışı} \\ \text{EKOSİSTEMİN TEPKİSİNİN SERBEST BESİN ELEMENTİ} \\ \text{ÜZERİNDEN EKOSİSTEM DURUMUNA YANSIMASI}}} + \underbrace{\frac{k_U \cdot AN}{\text{Serbest besin elementinin bünyeye alımı}}}_{\text{Serbest besin elementinin bünyeye alımı}} - \underbrace{\frac{k_R \cdot BN}{\text{Bağlı besin elementinin serbest bırakılması}}}_{\text{Bağlı besin elementinin serbest bırakılması}}$$

SERBEST BESİN ELEMENTİ İÇİN EKTİ=TEPKİ

$$\underbrace{\frac{W a_{BN}}{V} + \frac{Q_{IN,NAE} \cdot BN_{NAE}}{V}}_{\substack{\text{Havzadan} \\ \text{bağlı} \\ \text{besin} \\ \text{elementi} \\ \text{girişi} \\ \text{EKOSİSTEME BAĞLI BESİN ELEMENTİ} \\ \text{ÜZERİNDEN DIŞ ETKİ}}} = \underbrace{\frac{Q_{OUT,NAE}}{V} \cdot BN}_{\substack{\text{Komşu su} \\ \text{ekosistemine} \\ \text{bağlı besin} \\ \text{elementi} \\ \text{çıkışı} \\ \text{EKOSİSTEMİN TEPKİSİNİN SERBEST BESİN ELEMENTİ} \\ \text{ÜZERİNDEN EKOSİSTEM DURUMUNA YANSIMASI}}} + \underbrace{\frac{v_{B,BN}}{H} \cdot BN}_{\substack{\text{Derin} \\ \text{sedimente} \\ \text{gömülerek} \\ \text{ekosistem} \\ \text{dışına} \\ \text{bağlı} \\ \text{besin} \\ \text{elementi} \\ \text{çıkışı}}} - \underbrace{\frac{k_U \cdot AN}{\text{Serbest besin elementinin bünyeye alımı}}}_{\text{Serbest besin elementinin bünyeye alımı}} + \underbrace{\frac{k_R \cdot BN}{\text{Bağlı besin elementinin serbest bırakılması}}}_{\text{Bağlı besin elementinin serbest bırakılması}}$$

BAĞLI BESİN ELEMENTİ İÇİN EKTİ=TEPKİ

$$\begin{aligned}
mia_{AN,AN} &= \frac{-a_{BN,BN}}{a_{AN,AN} \cdot a_{BN,BN} - a_{AN,BN} \cdot a_{BN,AN}} & a_{AN,AN} &= -\left(\frac{Q_{OUT,NAE}}{V} + k_U\right) & a_{AN,BN} &= k_R \\
mia_{AN,BN} &= \frac{a_{AN,BN}}{a_{AN,AN} \cdot a_{BN,BN} - a_{AN,BN} \cdot a_{BN,AN}} & a_{BN,AN} &= k_U & a_{BN,BN} &= -\left(\frac{Q_{OUT,NAE}}{V} + \frac{v_{B,BN}}{H} + k_R\right) \\
mia_{BN,AN} &= \frac{a_{BN,AN}}{a_{AN,AN} \cdot a_{BN,BN} - a_{AN,BN} \cdot a_{BN,AN}} & W_{AN} &= \frac{W a_{AN}}{V} + \frac{Q_{IN,NAE} \cdot AN_{NAE}}{V} \\
mia_{BN,BN} &= \frac{-a_{AN,AN}}{a_{AN,AN} \cdot a_{BN,BN} - a_{AN,BN} \cdot a_{BN,AN}} & W_{BN} &= \frac{W a_{BN}}{V} + \frac{Q_{IN,NAE} \cdot BN_{NAE}}{V}
\end{aligned}$$

Ekosistem içindeki **serbest** **besin elementinin** komşu su ekosistemine akışı $= \frac{Q_{OUT,MAE}}{V} \cdot (mia_{AN,AN} \cdot W_{AN} + mia_{AN,BN} \cdot W_{BN})$

Ekosistem içindeki **bağlı** **besin elementinin** komşu su ekosistemine akışı $= \frac{Q_{OUT,MAE}}{V} \cdot (mia_{BN,AN} \cdot W_{AN} + mia_{BN,BN} \cdot W_{BN})$

Ekosistem içindeki **bağlı** **besin elementinin** sedimentte derine gömülme ile sistemden çıkışı $= \frac{v_{B,BN}}{H} \cdot (mia_{BN,AN} \cdot W_{AN} + mia_{BN,BN} \cdot W_{BN})$

Ekosistem içindeki **serbest** **besin elementinin** bünyeye alınması $= k_U \cdot (mia_{AN,AN} \cdot W_{AN} + mia_{AN,BN} \cdot W_{BN})$

Ekosistem içindeki **bağlı** **besin elementinin** serbest bırakılması $= k_R \cdot (mia_{BN,AN} \cdot W_{AN} + mia_{BN,BN} \cdot W_{BN})$

Şekil 2.2 Kararlı durum yaklaşımına göre etki-tepki ilişkileri

Denklem 2.7'nin dinamik durum başka bir deyişle zamana göre değişken durumu için çözümü ise daha uzun ve karmaşıktır. Benzer biçimdeki diferansiyel denklem takımları için geçerli analitik çözüm gruplarının elde edilişi Ek-A'da verilmektedir. Ek-A'da verilen çözüm grubu elemanlarından geçerli olanı Denklem 2.7 üzerinde uygulandığında Denklem 2.13 ve Denklem 14'te verilen biçimlerde çözümler elde edilmektedir. Çözümlerdeki terimler, Denklem 2.15 – Denklem 2.28'de verilmiştir. Denklem 2.13 ve Denklem 2.14'ten de anlaşılacağı çözümler hem başlangıç konsantrasyonunun hem de dış etkilerin fonksiyonudur.

$$AN(t) = AN_0 \cdot f_{AN,AN_0}(t) + BN_0 \cdot f_{AN,BN_0}(t) + W_{AN} \cdot f_{AN,W_{AN}}(t) + W_{BN} \cdot f_{AN,W_{BN}}(t) \quad (\text{Denklem 2.13})$$

$$BN(t) = AN_0 \cdot f_{BN,AN_0}(t) + BN_0 \cdot f_{BN,BN_0}(t) + W_{AN} \cdot f_{BN,W_{AN}}(t) + W_{BN} \cdot f_{BN,W_{BN}}(t) \quad (\text{Denklem 2.14})$$

$$f_{AN,AN_0}(t) = \frac{a_{AN,AN} - \lambda_{BN}}{\lambda_{AN} - \lambda_{BN}} \cdot (\exp(\lambda_{AN} \cdot t) - \exp(\lambda_{BN} \cdot t)) + \exp(\lambda_{AN} \cdot t) \quad (\text{Denklem 2.15})$$

$$f_{AN,BN_0}(t) = \frac{a_{AN,BN}}{\lambda_{AN} - \lambda_{BN}} \cdot (\exp(\lambda_{AN} \cdot t) - \exp(\lambda_{BN} \cdot t)) \quad (\text{Denklem 2.16})$$

$$f_{AN,W_{AN}}(t) = \frac{1 + \lambda_{BN} \cdot \alpha'_{1,1}}{\lambda_{AN} - \lambda_{BN}} \cdot (\exp(\lambda_{AN} \cdot t) - \exp(\lambda_{BN} \cdot t)) + \alpha'_{AN,AN} \cdot (1 - \exp(\lambda_{BN} \cdot t)) \quad (\text{Denklem 2.17})$$

$$f_{AN,W_{BN}}(t) = \frac{\lambda_{BN} \cdot \alpha'_{AN,BN}}{\lambda_{AN} - \lambda_{BN}} \cdot (\exp(\lambda_{AN} \cdot t) - \exp(\lambda_{BN} \cdot t)) + \alpha'_{AN,BN} \cdot (1 - \exp(\lambda_{BN} \cdot t)) \quad (\text{Denklem 2.18})$$

$$f_{BN,AN_0}(t) = \frac{\alpha_{BN,AN}}{\lambda_{AN} - \lambda_{BN}} \cdot (\exp(\lambda_{AN} \cdot t) - \exp(\lambda_{BN} \cdot t)) \quad (\text{Denklem 2.19})$$

$$f_{BN,BN_0}(t) = \frac{\alpha_{BN,BN} - \lambda_{BN}}{\lambda_{AN} - \lambda_{BN}} \cdot (\exp(\lambda_{AN} \cdot t) - \exp(\lambda_{BN} \cdot t)) + \exp(\lambda_{BN} \cdot t) \quad (\text{Denklem 2.20})$$

$$f_{BN,W_{AN}}(t) = \frac{\lambda_{BN} \cdot \alpha'_{BN,AN}}{\lambda_{AN} - \lambda_{BN}} \cdot (\exp(\lambda_{AN} \cdot t) - \exp(\lambda_{BN} \cdot t)) + \alpha'_{BN,AN} \cdot (1 - \exp(\lambda_{BN} \cdot t)) \quad (\text{Denklem 2.21})$$

$$f_{BN,W_{BN}}(t) = \frac{1 + \lambda_{BN} \cdot \alpha'_{BN,BN}}{\lambda_{AN} - \lambda_{BN}} \cdot (\exp(\lambda_{AN} \cdot t) - \exp(\lambda_{BN} \cdot t)) + \alpha'_{BN,BN} \cdot (1 - \exp(\lambda_{BN} \cdot t)) \quad (\text{Denklem 2.22})$$

$$\lambda_{AN} = \frac{\alpha_{AN,AN} + \alpha_{AN,BN}}{2} + \frac{\sqrt{(k_U + k_R)^2 + 4 \cdot k_R \cdot k_U}}{2} \quad (\text{Denklem 2.23})$$

$$\lambda_{BN} = \frac{\alpha_{AN,AN} + \alpha_{AN,BN}}{2} - \frac{\sqrt{(k_U + k_R)^2 + 4 \cdot k_R \cdot k_U}}{2} \quad (\text{Denklem 2.24})$$

$$\alpha'_{AN,AN} = - \frac{\alpha_{BN,BN}}{\alpha_{AN,AN} \cdot \alpha_{BN,BN} - \alpha_{AN,BN} \cdot \alpha_{BN,AN}} \quad (\text{Denklem 2.25})$$

$$\alpha'_{BN,AN} = \frac{\alpha_{AN,BN}}{\alpha_{AN,AN} \cdot \alpha_{BN,BN} - \alpha_{AN,BN} \cdot \alpha_{BN,AN}} \quad (\text{Denklem 2.26})$$

$$\alpha'_{BN,BN} = - \frac{\alpha_{AN,AN}}{\alpha_{AN,AN} \cdot \alpha_{BN,BN} - \alpha_{AN,BN} \cdot \alpha_{BN,AN}} \quad (\text{Denklem 2.27})$$

$$\alpha'_{AN,BN} = \frac{\alpha_{AN,BN}}{\alpha_{AN,AN} \cdot \alpha_{BN,BN} - \alpha_{AN,BN} \cdot \alpha_{BN,AN}} \quad (\text{Denklem 2.28})$$

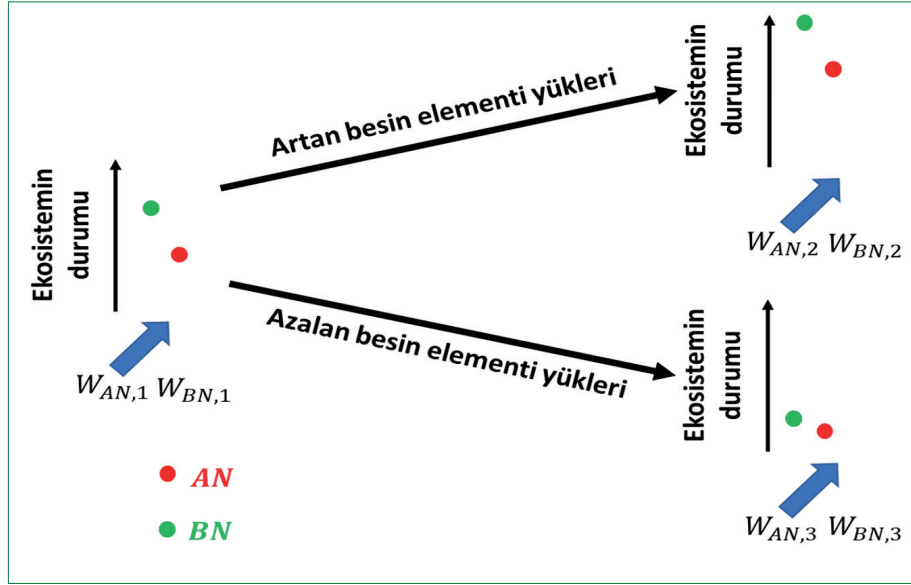
Bu denklemlerde λ_{AN} ve λ_{BN} sistemin katsayılar matrisinin özdeğerleridir.

Bu kısma kadar türetilen kütle dengesinin temel çıktıları aşağıda sıralanarak özetlenmiştir:

- Ekosistemin dış etkilere bir cevabı olarak durumu
- Tüm kalemelerin ayrı ayrı ve sayısal olarak ortaya koyulduğu besin elementi muhasebesi
 - Su ekosistemine havzasından giren besin elementi
 - Su ekosisteminden çıkan besin elementi
 - Su ekosisteminin komşu su ekosistemleri ile besin elementi giriş çıkışı
 - Su ekosisteminin içindeki besin elementi dönüşümleri

Bu çıktıların ikisi de su ekosistemlerinin mevcut durumlarının tanımlanması ve ilgili su ekosistemlerinin yönetilmesi için önemlidir. Ancak bu iki çıktının iki farklı yaklaşım ile (kararlı durum yaklaşımı ve dinamik yaklaşım) elde edildiği unutulmamalıdır. Bu nedenle, bu iki yaklaşımın da karşılaştırılarak farklarının ortaya koyulması gerekmektedir.

Kararlı durum yaklaşımı ekosistemin uzun süreli ortalama durumunu ve besin elementi bütçesini vermektedir. Sonuçlar ise yalnızca herhangi bir dış etken altında sistemin durumudur. Sonuçlarda zaman bilgisi yoktur (Şekil 2.3).

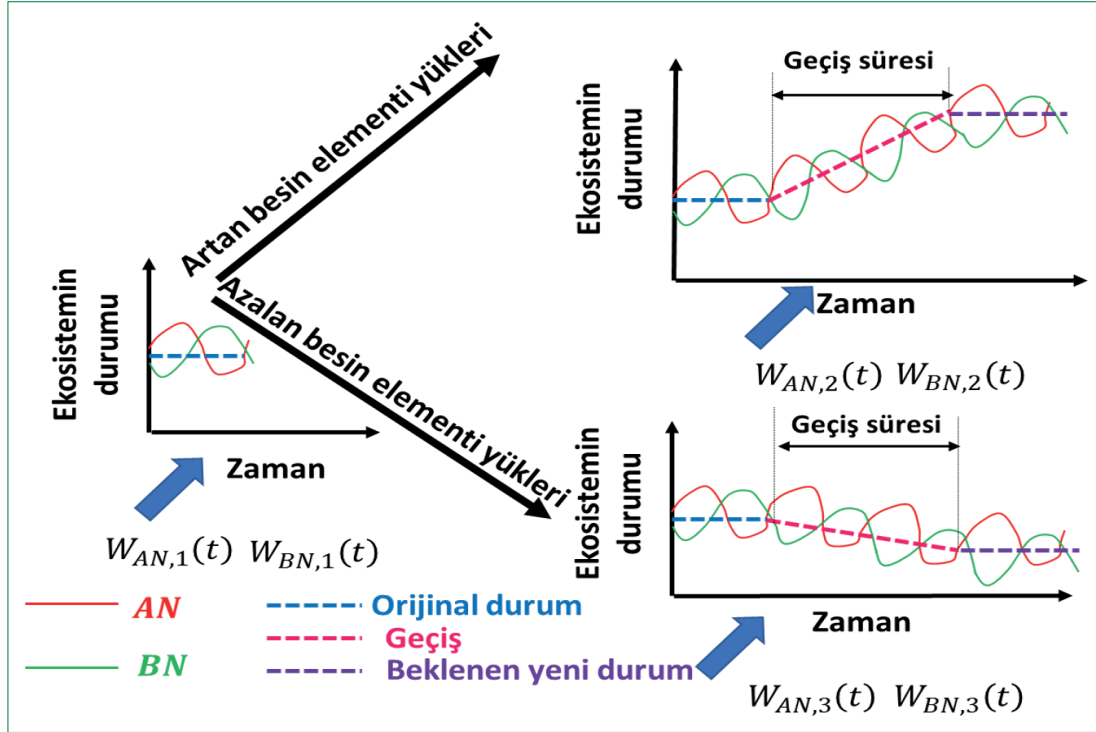


Şekil 2.3 Kararlı durum yaklaşımı

Kararlı durum analizinin ve elde edilen çıktılarının temel özellikleri aşağıda sıralanmaktadır:

- Değişken dış koşullarda sistemin durumunda nasıl bir değişim beklenebileceğini verir.
- Değişimin sayısal büyüklüğünü de verebilir.
- Girdi ve çıktıları basittir ve analizin uygulanması nispeten kolaydır
- Ancak ekosistemin öngörülen duruma ne kadar sürede ulaşacağını vermemektedir. Bu nedenle bir su ekosisteminin dış etkenler altındaki davranışının öngörülmesi mümkündür ancak bunun ne kadar sürede gerçekleşeceği bilgisi elde edilememektedir.

Dinamik yaklaşım, ekosistem durumunun ve besin elementi bütçesini zaman serisi olarak verebilir. Sonuçlar ise yalnızca herhangi bir dış etken ve sistemin analize başlanılan andaki durumunun etkisi altında sistemin durumunun zamana göre fonksiyonudur (Şekil 2.4).



Şekil 2.4 Dinamik yaklaşım

Dinamik durum analizinin ve elde edilen çıktıların temel özellikleri aşağıda sıralanmaktadır:

- Kararlı durum yaklaşımından alınabilecek her çıktıyı verebilir, ancak sonuçların işlemden geçirilmesi gerekebilir.
- Ekosistemin mevsimsel-periyodik davranışını verebilir.
- Geçiş süresinin uzunluğunu verebilir.
- Ancak uygulanması kararlı durum yaklaşımından daha zordur, daha ayrıntılı matematiksel yöntemlerin uygulanmasını gerektirir² ve daha ayrıntılı girdi verisi gerektirir.³

² Tüm çözüm sürecinin Denklem 2.8 – Denklem 2.12’de verilen kararlı durum çözümleri ile yalnızca sonuçların özetlendiği Denklem 2.13 – Denklem 2.28 ve çözüm sürecini ayrıntıları ile veren Ek-A karşılaştırıldığında burada vurgulanmak istenen anlaşılabacaktır.

³ Girdi verileri (örneğin çevresel koşullar ya da dışarıdan gelen besin elementi yükü) kararlı durum modellerinde olduğu gibi zaman üzerinden ortalaması alınmış değerler yerine zaman serileri olarak modele girilmelidir. Bu durumda, matematiksel çözümler Denklem 2.13 – Denklem 2.28 ve Ek-A’da gösterildiğinden daha da karmaşık hale gelebilmektedir.

3. İklim Değişiminin Su Ekosistemlerine Etkilerinin Ortaya Koyulması

Bu kısım; bir önceki bölümde önerilen model yapısının⁴ iklim değişiminin etkilerini de ortaya koyulmasını sağlayacak şekilde genişletilmesinin gösterilmesine ayrılmıştır. Gerek konunun anlatımını kolaylaştırmak gerekse bir kitap bölümü için mümkün olduğunca makul bir hacimde kalabilmek için, önerilen genişletmeler kararlı durum modeli üzerinde gösterilecektir.

İklim değişimi, yıllık yağış ve yıllık ortalama hava sıcaklığındaki değişimler olarak ele alınacaktır. Önceki paragrafta belirtilen nedenlerle model kararlı durum yaklaşımı ile kurgulanacağı için, iklim değişiminin mevsimsel yağış ve hava sıcaklığı değişimi etkileri dikkate alınmayacaktır.

Yıllık ortalama yağıştaki değişim su ekosisteminde aşağıdaki değişimlere neden olacaktır

- Havzadaki yağış/akış düzeninin değişmesi nedeniyle ekosistemine giren havza kökenli yüzeysel akış değişecektir. Bu durumda su ekosisteminin çıkış akımı da değişeceğinden hidrolik bekletme süresi değişecektir. Hidrolik bekletme süresinin değişmesi su ekosistemi içindeki tüm madde ve ısı taşınımını değiştirecektir. Bunun önemli bir etkisi, hava sıcaklığının hiç değişmemesi durumunda bile sistemin içindeki taşınımın değişmesinden dolayı su sıcaklığının değişecek olmasıdır. Ayrıca çıkış akımı ve buharlaşma dengesi de hava sıcaklığındaki değişim haricinde değişecektir.
- Yüzeysel akışın değişmesi ayrıca havza içindeki taşınım proseslerini (örneğin erozyonu) değiştireceği için sisteme dışarıdan giren yükler de değişecektir.

Yıllık ortama hava sıcaklığı değişiminin etkileri ise doğrudan su sıcaklığı üzerinde olacak ve buharlaşmayı da etkilediği için, yağış miktarının hiç değişmediği durumda dahi taşınım, su sıcaklığı ve hidrolik bekletme süresine yukarıda öngörülenlere benzer etkileri olacaktır. Burada vurgulanması gereken, sulak alanların sığ su ekosistemleri olması nedeniyle özellikle buharlaşma sebebiyle su miktarı hatta yıllık su hacminin ve su sıcaklıklarının bağlı değişimine diğer nispeten daha derin olan durgun sistemlerinden (örneğin alışılagelmiş göller veya baraj gölleri) daha şiddetli tepki vermelerinin beklenmesidir⁵. Beklenen değişiklikler incelendiğinde; serbest ve bağlı besin elementleri için önerilen kararlı durum analizi modeli (Denklem 2.11 ve Denklem 2.12) aşağıda verildiği gibi yazılmalıdır (Denklem 3.1 ve Denklem 3.2).

$$AN(P, T_A) = mia_{AN,AN}(P, T_A) \cdot W_{AN}(P, T_A) + mia_{AN,BN}(P, T_A) \cdot W_{BN}(P, T_A) \quad (\text{Denklem 3.1})$$

$$BN(P, T_A) = mia_{BN,AN}(P, T_A) \cdot W_{AN}(P, T_A) + mia_{BN,BN}(P, T_A) \cdot W_{BN}(P, T_A) \quad (\text{Denklem 3.2})$$

⁴ Bu modelin gerçek bir sulak alan ekosisteminin çok basitleştirilmiş bir temsili olduğu ve herhangi bir probleme doğrudan uygulanmasının çok dikkatli bir çalışma ile yapılması gerektiği açıktır. Özellikle yaşam bilimlerinde uzman olan birçok okuyucu tarafından da eleştiriye hedef olması olasıdır. Ancak bu modelin kurulumundaki amaç, doğrudan bir probleme uygulanması değil, bu bölümde önerilen genel bir model yapısının değerlendirilmesidir.

⁵ Bu beklentiler ve benzerleri elbette sağduyulu birçok bilim insanı tarafından da dile getirilmekte birlikte beklenen değişimleri sayısal olarak ortaya koyabilmek pek kolay değildir ve ülkemizde bu tür çalışmalar nispeten nadirdir. Bu nedenle de bu kısımda anlatılan bir hesap aracı yaklaşımı ortaya koyulacaktır.

Bu denklemlerde, yağış hava sıcaklığı anlamındadır. Eğer iklim değişimi sonucu yağış hava sıcaklığı ise kadar değişiyorsa serbest ve bağlı besin elementi değişimlerinin hesaplanması için, tam diferansiyellerinin alınması yeterli olacaktır (Denklem 3.3 ve Denklem 3.4). Bu denklemlerdeki “” diferansiyel operatörüdür ve herhangi bir bağımlı ya da bağımsız değişken yönündeki çok küçük bir değişimi ifade etmektedir.

$$\begin{aligned}
 dAN(P, T_A) &= \frac{\partial AN(P, T_A)}{\partial P} \cdot dP + \frac{\partial AN(P, T_A)}{\partial T_A} \cdot dT_A = \\
 &\left(\frac{\partial}{\partial P} AN(P, T_A) \right) \cdot dP + \left(\frac{\partial}{\partial T_A} AN(P, T_A) \right) \cdot dT_A = \\
 &\left(\frac{\partial}{\partial P} (mia_{AN,AN}(P, T_A) \cdot W_{AN}(P, T_A) + mia_{AN,BN}(P, T_A) \cdot W_{BN}(P, T_A)) \right) \cdot dP + \\
 &\left(\frac{\partial}{\partial T_A} (mia_{AN,AN}(P, T_A) \cdot W_{AN}(P, T_A) + mia_{AN,BN}(P, T_A) \cdot W_{BN}(P, T_A)) \right) \cdot dT_A = \\
 &\left(\frac{\partial mia_{AN,AN}(P, T_A)}{\partial P} \cdot W_{AN}(P, T_A) + mia_{AN,AN}(P, T_A) \cdot \frac{\partial W_{AN}(P, T_A)}{\partial P} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial mia_{AN,BN}(P, T_A)}{\partial P} \cdot W_{BN}(P, T_A) + mia_{AN,BN}(P, T_A) \cdot \frac{\partial W_{BN}(P, T_A)}{\partial P} \right) \cdot dP + \\
 &\left(\frac{\partial mia_{AN,AN}(P, T_A)}{\partial T_A} \cdot W_{AN}(P, T_A) + mia_{AN,AN}(P, T_A) \cdot \frac{\partial W_{AN}(P, T_A)}{\partial T_A} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial mia_{AN,BN}(P, T_A)}{\partial T_A} \cdot W_{BN}(P, T_A) + mia_{AN,BN}(P, T_A) \cdot \frac{\partial W_{BN}(P, T_A)}{\partial T_A} \right) \cdot dT_A
 \end{aligned} \tag{Denklem 3.3}$$

$$\begin{aligned}
 dBN(P, T_A) &= \frac{\partial BN(P, T_A)}{\partial P} \cdot dP + \frac{\partial BN(P, T_A)}{\partial T_A} \cdot dT_A = \\
 &\left(\frac{\partial}{\partial P} BN(P, T_A) \right) \cdot dP + \left(\frac{\partial}{\partial T_A} BN(P, T_A) \right) \cdot dT_A = \\
 &\left(\frac{\partial}{\partial P} (mia_{BN,AN}(P, T_A) \cdot W_{AN}(P, T_A) + mia_{BN,BN}(P, T_A) \cdot W_{BN}(P, T_A)) \right) \cdot dP + \\
 &\left(\frac{\partial}{\partial T_A} (mia_{BN,AN}(P, T_A) \cdot W_{AN}(P, T_A) + mia_{BN,BN}(P, T_A) \cdot W_{BN}(P, T_A)) \right) \cdot dT_A = \\
 &\left(\frac{\partial mia_{BN,AN}(P, T_A)}{\partial P} \cdot W_{AN}(P, T_A) + mia_{BN,AN}(P, T_A) \cdot \frac{\partial W_{AN}(P, T_A)}{\partial P} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial mia_{BN,BN}(P, T_A)}{\partial P} \cdot W_{BN}(P, T_A) + mia_{BN,BN}(P, T_A) \cdot \frac{\partial W_{BN}(P, T_A)}{\partial P} \right) \cdot dP + \\
 &\left(\frac{\partial mia_{BN,AN}(P, T_A)}{\partial T_A} \cdot W_{AN}(P, T_A) + mia_{BN,AN}(P, T_A) \cdot \frac{\partial W_{AN}(P, T_A)}{\partial T_A} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial mia_{BN,BN}(P, T_A)}{\partial T_A} \cdot W_{BN}(P, T_A) + mia_{BN,BN}(P, T_A) \cdot \frac{\partial W_{BN}(P, T_A)}{\partial T_A} \right) \cdot dT_A
 \end{aligned} \tag{Denklem 3.4}$$

$dAN(P,T_A)$ ve $dBN(P,T_A)$ sırasıyla serbest ve bağlı besin elementlerinin değişimini temsil etmektedir ve Denklem 3.3 ve Denklem 3.4 kullanılarak hesaplanabilmeleri için $mia_{AN,AN}(P,T_A)$, $mia_{AN,BN}(P,T_A)$, $mia_{BN,AN}(P,T_A)$, $mia_{BN,BN}(P,T_A)$, $W_{AN}(P,T_A)$ ve $W_{BN}(P,T_A)$ ve ifadelerinin sürekli ve türevlenebilir olarak ortaya koyulması gerekmektedir⁶. Bu fonksiyonlar iklim değişiminin yönlerini ortaya koymakta, kısmî türevler iki ayrı iklim etkeninin serbest ve bağlı besin elementlerinin toplam değişimdeki etkilerini belirleyebilmekte ve herhangi bir P, T_A veri noktasındaki serbest ve bağlı besin elementlerinin konsantrasyonlarını doğrudan hesaplanabilmelerini sağlamaktadır.

Bu amaçla öncelikle Denklem 2.7'deki tepki matrisine yakından bakılabilir (Şekil 3.1).

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} AN \\ BN \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{AN,AN} & a_{AN,BN} \\ a_{BN,AN} & a_{BN,BN} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Ekosistemin dış etkilere} \\ \text{gösterdiği tepkisel davranışı} \\ \text{temsil eden tepki matrisi}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} AN \\ BN \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Ekosistemin} \\ \text{durumunu} \\ \text{temsil eden çözüm} \\ \text{vektörü}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} W_{AN} \\ W_{BN} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Ekosisteme olan} \\ \text{dış etkileri temsil} \\ \text{eden sabitler} \\ \text{vektörü}}}$$

$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{Q_{OUT,NAE}}{V} + k_U\right) & k_R \\ k_U & -\left(\frac{Q_{OUT,NAE}}{V} + \frac{v_{B,BN}}{V} + k_R\right) \end{bmatrix}$$

Şekil 3.1 Tepki matrisine yakından bakış

Modelin basit tutulabilmesi için, su ekosistemi hacminin ve çökme hızının yağış ve hava sıcaklığından bağımsız olduğu varsayılırsa tepki matrisindeki debi ve kinetik terimler yağış ve/veya hava sıcaklığına bağlıdır (Şekil 3.2'de kırmızı ile gösterilen ifadeler)

$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{Q_{OUT,NAE}}{V} + k_U\right) & k_R \\ k_U & -\left(\frac{Q_{OUT,NAE}}{V} + \frac{v_{B,BN}}{H} + k_R\right) \end{bmatrix}$$

Şekil 3.2 Tepki matrisinin yağış ve hava sıcaklığına bağlı terimleri

Şekil 2.6'daki kinetik terimler su sıcaklığına doğrudan bağlıdır. Su sıcaklığı ise hem yağışa hem de hava sıcaklığına bağlıdır. Bu durum Denklem 3.5 ve Denklem 3.6 ile ifade edilmektedir. Bu

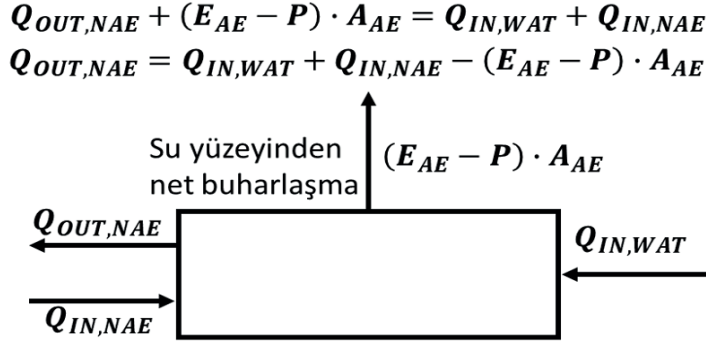
denklemlerde hava sıcaklığı, P ise yağış anlamındadır.

(Denklem 3.5)

$$k_R = f_1(T_W), \quad T_W = T_W(T_A, P) \Rightarrow k_R = f_1(T_A, P) \quad (\text{Denklem 3.6})$$

Yıllık $k_U = f_2(T_W)$, $T_W = T_W(T_A, P) \Rightarrow k_U = f_2(T_A, P)$ ortalama çıkış debisi için, su ekosistemi üzerinde bir su bütçesi yazılabilir (Şekil 3.3). Bu su bütçesinde sistemin yeraltı suyu ile etkileşiminin ısı etkileşimi açısından nötr olduğu varsayılmıştır⁷.

Şekil 3.3 Su ekosistemi üzerinden yazılan su bütçesi



Şekil 3.3'te verilen su bütçesi yağışa doğrudan bağlıdır çünkü bütçede yağış terimi doğrudan bulunmaktadır. Buharlaşma terimi E_{AE} da su sıcaklığına bağlıdır. A_{AE} ise yüzey alanı anlamındadır. Su sıcaklığı ise hem su bütçesinin kendisine hem hava sıcaklığına bağlıdır. Bu durumda su yüzünden buharlaşma için Denklem 3.7 geçerlidir.

(Denklem 3.7)

$$E_{AE} = f_3(T_W), \quad T_W = T_W(T_A, P) \Rightarrow E_{AE} = f_3(T_A, P)$$

S o n olarak da terimi havzadan gelen akışı temsil ettiği için temel hidroloji bilgisi ve kuralları dikkate alınarak Şekil 2.4 Dinamik yaklaşım Denklem 3.8 yazılabilir.

$$Q_{IN,WAT} = f_4(T_A, P) \quad (\text{Denklem 3.8})$$

Denklem 3.7 ve Denklem 3.8, Şekil 3.3'te verilen su bütçesinde yerlerine koyulduklarında, Denklem 3.9 elde edilir.

$$Q_{OUT,NAE} = f_4(T_A, P) + Q_{IN,NAE} - (f_3(T_A, P) - P) \cdot A_{AE} \quad (\text{Denklem 3.9})$$

⁷ Bu varsayım basitleştirme içindir ve gerçek bir çalışmada yapılp yapılamayacağına birçok veri analiz edilerek karar verilebilmektedir.

Buna göre tepki matrisi yıllık yağışa ve yıllık ortalama hava sıcaklığına bağlı yazılabilir (Şekil 3.4).

$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{f_4(T_A, P) + Q_{IN,NAE} - (f_3(T_A, P) - P) \cdot A_{AE}}{V} + f_2(T_A, P)\right) & f_1(T_A, P) \\ f_2(T_A, P) & -\left(\frac{f_4(T_A, P) + Q_{IN,NAE} - (f_3(T_A, P) - P) \cdot A_{AE}}{V} + \frac{v_{B,BN}}{H} + f_1(T_A, P)\right) \end{bmatrix}$$

Şekil 3.4 Tepki matrisinin yıllık yağış ve yıllık ortalama sıcaklığa göre yazılması

Öncelikle havzadan gelen toplam akışı veren bir ifade gerekmektedir. Bu amaçla yıllık potansiyel evapotranspirasyon Coutagne⁸ formülü kullanılarak hesaplanabilir ve düzeltilip yıllık gerçekleşen evapotranspirasyona çevrilip yıllık yağıştan çıkarılıp havza alanı ile çarpılarak yazılan bir ifade türetilebilir (Denklem 3.10)

$$f_4(T_A, P) = Q_{IN,WAT} = \frac{1000}{365} \cdot \left(P - CC_1 \cdot \left(P - \frac{0.001}{0.8 + 0.14 \cdot T} \cdot P^2 \right) \right) \cdot A_{WA} \quad (\text{Denklem 3.10})$$

Denklem 3.10'da P yıllık yağış (mm/yıl), T yıllık ortalama sıcaklık (°C), A_{WA} Havza alanı (km²) ve CC1 potansiyel evapotranspirasyonu gerçek evapotranspirasyona dönüştüren ve birden küçük olan bir katsayıdır. Havzadan çıkıp su ekosistemine giren debi ise m³/gün biriminde hesaplanmaktadır. Bir sonraki adım ise, hem su yüzünden buharlaşmanın (ve dolayısıyla da su dengesinin) hem de kinetik sabitlerin bağlı olduğu su sıcaklığının hesaplanmasıdır. Bu amaçla Arceivala (2002) tarafından verilen Denklem 3.11⁹ kullanılabilir.

$$T_W = \frac{A_{AE} \cdot f \cdot T_A + Q_{IN,WAT} \cdot T_{IN}}{A_{AE} \cdot f + Q_{IN,WAT}} \quad (\text{Denklem 3.11})$$

Bu denklemde

: Sisteme giren suyun sıcaklığı (havzadan gelen akışın sıcaklığı) (°C)

: Ampirik bir oran sabiti (0,49 – 0,50 alınır)

anlamındadır. Sisteme giren suyun sıcaklığı ise Stefan ve Preud'homme (1993) tarafından verilen Denklem 3.12 ile tahmin edilebilir.

$$T_{IN} = 5 + 0,75 \cdot T_A \quad (\text{Denklem 3.12})$$

Denklem 3.12 ve Denklem 3.10, Denklem 3.11'de yerlerine koyulduğunda, Denklem 3.13 elde edilmektedir.

⁸ Buna bezer birçok formül bulunmaktadır.

⁹ Bu denklem aşında stabilizasyon havuzları için verilmiş olmakla birlikte, sığ ve nispeten küçük olan sulak alanlar için de basit bir model düzeyinde kullanımı uygundur.

$$T_W = \frac{A_{AE} \cdot f \cdot T_A + f_4(T_A, P) \cdot (5 + 0,75 \cdot T_A)}{A_{AE} \cdot f + f_4(T_A, P)} =$$

$$\frac{A_{AE} \cdot f \cdot T_A + \frac{1000}{365} \cdot \left(P - CC_1 \cdot \left(P - \frac{0,001}{0,8 + 0,14 \cdot T} \cdot P^2 \right) \right) \cdot A_{WA} \cdot (5 + 0,75 \cdot T_A)}{A_{AE} \cdot f + \frac{1000}{365} \cdot \left(P - CC_1 \cdot \left(P - \frac{0,001}{0,8 + 0,14 \cdot T} \cdot P^2 \right) \right) \cdot A_{WA}} \quad (\text{Denklem 3.13})$$

Kinetik katsayılar ise Arrhenius ifadesi¹⁰ ile hesaplanabilir (Denklem 3.14 ve Denklem 3.15)

$$f_1(T_A, P) = k_{R,20} \cdot \theta_{k_R}^{T_W - 20} \quad (\text{Denklem 3.14})$$

$$f_2(T_A, P) = k_{U,20} \cdot \theta_{k_U}^{T_W - 20} \quad (\text{Denklem 3.15})$$

Bu denklemlerde, θ_{k_R} ve θ_{k_U} sıcaklık düzeltme terimleridir. Denklem 3.13, Denklem 3.14 ve Denklem 3.15'te yerine koyulunca Denklem 3.16 ve Denklem 3.17 elde edilir.

$$f_1(T_A, P) = k_{R,20} \cdot \theta_{k_R}^{\frac{A_{AE} \cdot f \cdot T_A + f_4(T_A, P) \cdot (5 + 0,75 \cdot T_A)}{A_{AE} \cdot f + f_4(T_A, P)} - 20} \quad (\text{Denklem 3.14})$$

$$f_2(T_A, P) = k_{U,20} \cdot \theta_{k_U}^{\frac{A_{AE} \cdot f \cdot T_A + f_4(T_A, P) \cdot (5 + 0,75 \cdot T_A)}{A_{AE} \cdot f + f_4(T_A, P)} - 20} \quad (\text{Denklem 3.15})$$

Kinetik sabitlerden sonra, su ekosisteminden çıkış akımının hesaplanabilmesi için Şekil 3.3'te verilen su bütçesinin kurulması gerekmektedir. Bu amaçla öncelikle su yüzünden buharlaşma hesaplanmalıdır. Bu amaçla da Raudkivi (1979) tarafından herhangi bir sıcaklık için suyun buhar basıncını veren denklem kullanılarak Denklem 3.16 elde edilebilir.

$$f_3(T_A, P) = K_M \cdot 4,59 \cdot \underbrace{\left(\exp \left(\frac{17,27 \cdot T_W(T_A, P)}{237,3 + T_W(T_A, P)} \right) - R_L \cdot \exp \left(\frac{17,27 \cdot T_A}{237,3 + T_A} \right) \right)}_{\text{Doğgun su yüzeyi ile doğgun olmayan atmosfer arasındaki su buhar basıncı farkı (mm Hg)}} \quad (\text{Denklem 3.16})$$

Denklem 3.16'daki terimi bağıl nem, ise hem birim dönüşümü hem de su yüzeyi ile atmosfer arasındaki taşınımı sağlayan bir katsayı¹¹ anlamındadır. Denklem 3.13, Denklem 3.16'da yerine koyulduğunda Denklem 3.17 elde edilmektedir.

¹⁰ Burada modeli mümkün olduğu kadar basit bir şekilde kurgulamak amacıyla biyolojik reaksiyonların sıcaklıkla sürekli arttığını varsayan Arrhenius ifadesi kullanılmıştır. Bu reaksiyonları sıcaklık arttıkça arttıran ancak belli bir optimum sıcaklık aşıldığında tekrar azaltan daha gerçekçi ancak karmaşık ve çok daha fazla sayıda parametre gerektiren alt modellerin de kullanımı mümkündür.

¹¹ Bu ifade; Bowen oranı, rüzgâr hızı, suyun ısı kapasitesi gibi başka etkenlere de bağlı olmakla birlikte matematiksel anlamda bir sabittir.

$$f_3(T_A, P) = K_M \cdot \left(\exp \left(\frac{17,27 \cdot \frac{A_{AE} \cdot f \cdot T_A + f_4(T_A, P) \cdot (5 + 0,75 \cdot T_A)}{A_{AE} \cdot f + f_4(T_A, P)}}{237,3 + \frac{A_{AE} \cdot f \cdot T_A + f_4(T_A, P) \cdot (5 + 0,75 \cdot T_A)}{A_{AE} \cdot f + f_4(T_A, P)}} \right) - R_L \cdot \exp \left(\frac{17,27 \cdot T_A}{237,3 + T_A} \right) \right)$$

(Denklem 3.17)

Denklem 3.10 ve Denklem 3.17, Denklem 3.9'da yerine koyulunca sulak alandan çıkış debisi elde edilir (Denklem 3.18).

$$Q_{OUT,NAE} = \frac{1000}{365} \cdot \left(P - CC_1 \cdot \left(P - \frac{0.001}{0.8 + 0.14 \cdot T} \cdot P^2 \right) \right) \cdot A_{WA} + Q_{IN,NAE} - \left(K_M \cdot \left(\exp \left(\frac{17,27 \cdot \frac{A_{AE} \cdot f \cdot T_A + f_4(T_A, P) \cdot (5 + 0,75 \cdot T_A)}{A_{AE} \cdot f + f_4(T_A, P)}}{237,3 + \frac{A_{AE} \cdot f \cdot T_A + f_4(T_A, P) \cdot (5 + 0,75 \cdot T_A)}{A_{AE} \cdot f + f_4(T_A, P)}} \right) - R_L \cdot \exp \left(\frac{17,27 \cdot T_A}{237,3 + T_A} \right) - P \right) \cdot A_{AE}$$

(Denklem 3.18)

Bu aşamada artık tepki matrisinin elemanlarını yağış ve hava sıcaklığının fonksiyonları olarak yazmak için gerekli tüm ifadeler elde edilmiştir. Denklem 3 ve Denklem 4 kullanılarak, tepki matrisinin elemanlarını veren Denklem 3.19 - Denklem 3.22 elde edilebilir.

$$\begin{aligned} a_{AN,AN} &= - \left(\frac{Q_{OUT,NAE}}{V} + k_U \right) = -Q_{OUT,NAE} - k_U = \\ &= - \frac{1000}{365} \cdot \left(P - CC_1 \cdot \left(P - \frac{0.001}{0.8 + 0.14 \cdot T} \cdot P^2 \right) \right) \cdot \frac{A_{WA}}{V} + \frac{Q_{IN,NAE}}{V} + \\ &\quad \left(K_M \cdot \left(\exp \left(\frac{17,27 \cdot \frac{A_{AE} \cdot f \cdot T_A + f_4(T_A, P) \cdot (5 + 0,75 \cdot T_A)}{A_{AE} \cdot f + f_4(T_A, P)}}{237,3 + \frac{A_{AE} \cdot f \cdot T_A + f_4(T_A, P) \cdot (5 + 0,75 \cdot T_A)}{A_{AE} \cdot f + f_4(T_A, P)}} \right) - R_L \cdot \exp \left(\frac{17,27 \cdot T_A}{237,3 + T_A} \right) - P \right) \cdot \frac{A_{AE}}{V} - \right. \\ &\quad \left. k_{U,20} \cdot \theta_{k_U} \frac{\frac{A_{AE} \cdot f \cdot T_A + f_4(T_A, P) \cdot (5 + 0,75 \cdot T_A)}{A_{AE} \cdot f + f_4(T_A, P)} - 20}{20} \right) \end{aligned}$$

(Denklem 3.19)

$$a_{AN,BN} = k_R = k_{R,20} \cdot \theta_{k_R} \frac{\frac{A_{AE} \cdot f \cdot T_A + f_4(T_A, P) \cdot (5 + 0,75 \cdot T_A)}{A_{AE} \cdot f + f_4(T_A, P)} - 20}{20} \quad (\text{Denklem 3.20})$$

$$a_{BN,AN} = k_U = k_{U,20} \cdot \theta_{k_U} \frac{\frac{A_{AE} \cdot f \cdot T_A + f_4(T_A, P) \cdot (5 + 0,75 \cdot T_A)}{A_{AE} \cdot f + f_4(T_A, P)} - 20}{20} \quad (\text{Denklem 3.21})$$

$$\begin{aligned}
a_{BN,BN} = & - \left(\frac{Q_{OUT,NAE}}{V} + \frac{v_{B,BN}}{H} + k_R \right) = - \frac{Q_{OUT,NAE}}{V} - \frac{v_{B,BN}}{H} - k_R = \\
& - \frac{1000}{365} \cdot \left(P - CC_1 \cdot \left(P - \frac{0.001}{0.8 + 0.14 \cdot T} \cdot P^2 \right) \right) \cdot \frac{A_{WA}}{V} + \frac{Q_{IN,NAE}}{V} + \\
& \left(K_M \cdot \left(\exp \left(\frac{17,27 \cdot \frac{A_{AE} \cdot f \cdot T_A + f_4(T_A, P) \cdot (5 + 0,75 \cdot T_A)}{A_{AE} \cdot f + f_4(T_A, P)}}{237,3 + \frac{A_{AE} \cdot f \cdot T_A + f_4(T_A, P) \cdot (5 + 0,75 \cdot T_A)}{A_{AE} \cdot f + f_4(T_A, P)}} \right) - R_L \cdot \exp \left(\frac{17,27 \cdot T_A}{237,3 + T_A} \right) - P \right) \cdot \frac{A_{AE}}{V} - \right. \\
& \left. \frac{v_{B,BN}}{H} - k_{R,20} \cdot \theta_{k_R} \frac{A_{AE} \cdot f \cdot T_A + f_4(T_A, P) \cdot (5 + 0,75 \cdot T_A)}{A_{AE} \cdot f + f_4(T_A, P)} - 20 \right)
\end{aligned}$$

(Denklem 3.22)

Bu aşamada tepki matrisi, iklim değişiminin ana değişkenleri olan yıllık yağış ve yıllık ortalama sıcaklığın fonksiyonları olarak elde edilmiştir. Benzer işlemlerin ekosisteme dış etkileri (dışarıdan giren serbest ve bağlı besin elementi yüklerini) temsi eden sabitler vektörüne de uygulanması gerekmektedir. Su ekosistemine dışarıdan giren yükler havzadan akış ile taşınmaktadır. Bu durumda, havzadan gelen serbest ve bağlı besin elementi yükleri için Denklem 3.23 ve Denklem 3.24 yazılabilir.

$$\begin{aligned}
W_{AN} = & Q_{IN,WAT} \cdot CC_{AN}(P, T_A) \cdot AN_{WAT,REF} = \\
& \frac{1000}{365} \cdot \left(P - CC_{ET} \cdot \left(P - \frac{0.001}{0.8 + 0.14 \cdot T_A} \cdot P^2 \right) \right) \cdot A_{WA} \cdot CC_{AN}(P, T_A) \cdot AN_{WAT,REF}
\end{aligned}$$

(Denklem 3.23)

$$\begin{aligned}
W_{BN} = & Q_{IN,WAT} \cdot CC_{BN}(P, T_A) \cdot BN_{WAT,REF} = \\
& \frac{1000}{365} \cdot \left(P - CC_{ET} \cdot \left(P - \frac{0.001}{0.8 + 0.14 \cdot T_A} \cdot P^2 \right) \right) \cdot A_{WA} \cdot CC_{BN}(P, T_A) \cdot BN_{WAT,REF}
\end{aligned}$$

(Denklem 3.24)

Bu denklemlerde

$AN_{WAT,REF}$: Referans koşullarda havzadan gelen akışın serbest besin elementi konsantrasyonu (g/m^3)

$BN_{WAT,REF}$: Referans koşullarda havzadan gelen akışın bağlı besin elementi konsantrasyonu (g/m^3)

$CC_{AN}(P, T_A)$: Serbest besin elementi konsantrasyonu düzeltme faktörünü veren fonksiyon

$CC_{BN}(P, T_A)$: Bağlı besin elementi konsantrasyonu düzeltme faktörünü veren fonksiyon

anlamındadır. $CC_{AN}(P, T_A)$ ve $CC_{BN}(P, T_A)$ fonksiyonları türetilabilir olmakla birlikte ifadelerinin burada gösterilmesi pratik olmayacaktır.

Bununla birlikte okuyucuya ipucu vermek amacıyla aşağıda sıralanan tespitler yapılmıştır:

- Bu fonksiyonlar, öncelikle havzadaki erozyona bağlıdır. Erozyon ise yüzeysel akışa bağlıdır. Bu durumda

$Q_{LN,WAT}$ debisinin en azından dolaylı ve dolaysız akışa dönüştürülmesi düşünülebilir.

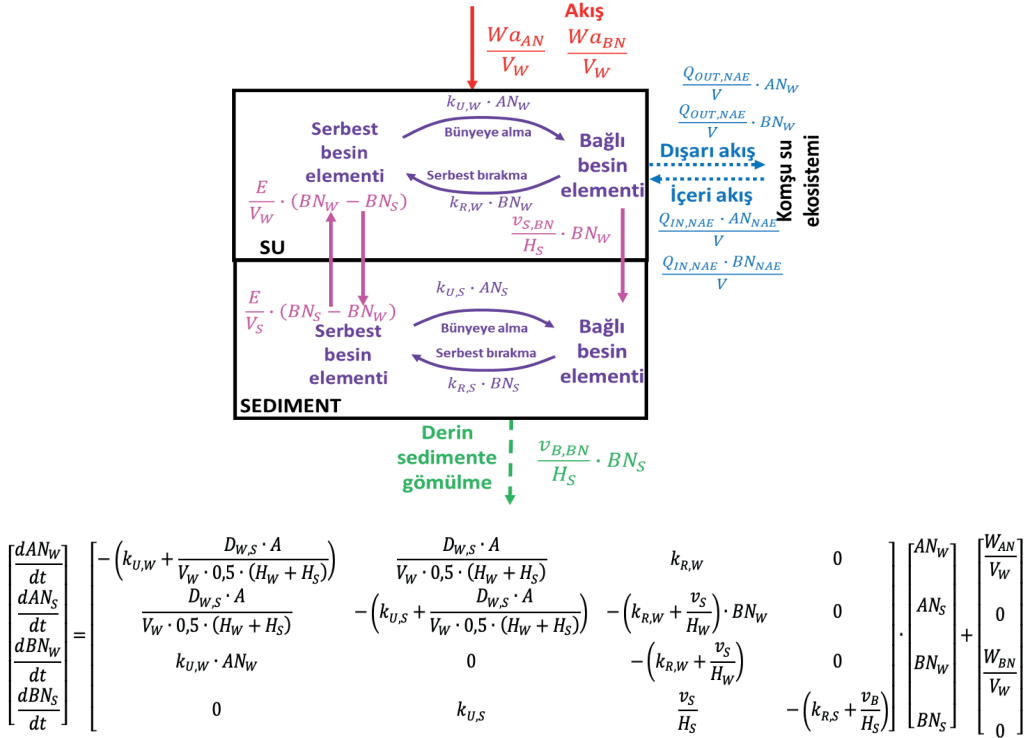
- Serbest ve bağlı besin elementleri su ekosistemlerinde olduğu gibi, havzanın karasal ekosisteminde de bünyeye alınmakta ve serbest bırakılmaktadır. Bu etkilerin de ilgili fonksiyonlara bu bölümde su ekosistem için yapılan işlemlere benzer tarzda türetilerek gömülmesi gereklidir.

Bu aşamada, Denklem 3.19 - Denklem 3.24, Denklem 10'da yerine koyularak sistem matrisinin tersinin elemanları elde edilebilir ve elde edilen elemanlar Denklem 2.11 ve Denklem 2.12'de yerlerine koyularak herhangi bir ortalama yıllık sıcaklık ve yıllık yağış için serbest ve bağlı besin elementi konsantrasyonları hesaplanabilir. Eğer sıcaklık-yağış model uzayının herhangi bir noktası civarında toplam iklim değişiminin serbest ve bağlı besin elementi konsantrasyonlarına etkisinin yönünün ve hava sıcaklığı ve yıllık yağış için ayrı ayrı yönlerinin verilmesi gerekmesi durumunda aynı denklemler Denklem 3.3 ve Denklem 3.4'te yerlerine koyulabilir. Bu son işlemin oldukça uzun ve zahmetli olduğunun göz önünde bulundurulmalıdır.

4. Gösterilen Tekniklerin Daha Gerçekçi Su Ekosistemi Modellerinde Uygulanması

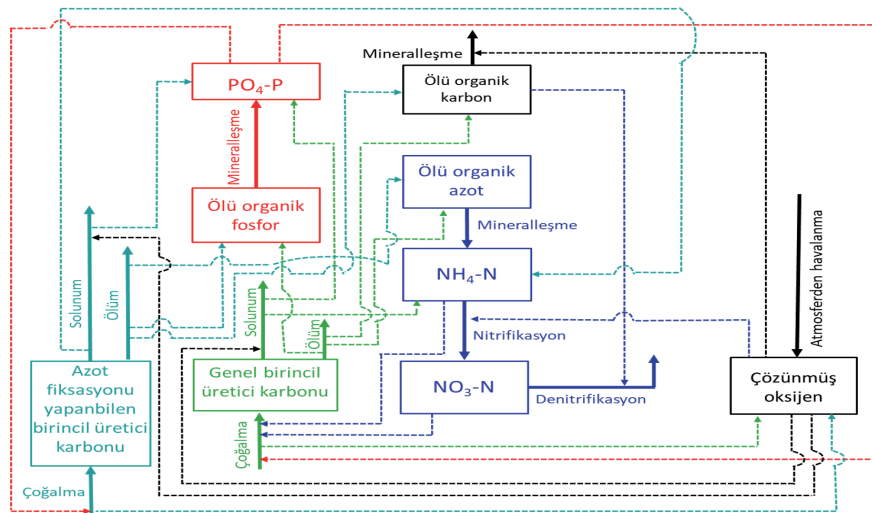
Bundan önceki iki kısımda, mümkün olan en basit su ekosistemi modelleri üzerinden iklim değişikliği etkisinin nasıl belirlenebileceği gösterilmeye çalışılmıştır. Su ekosistemleri, ilgili kısımlarda temsil edilen sistemlerden daha karmaşıktır. Örneğin sığ bir sulak alan ekosistemi en azından kendi tabanındaki sediment ile etkileşimde olacak ve sedimenti içindeki kinetikler su sütunundaki kinetiklerden farklı reaksiyon hızlarında ilerleyecektir. Buna uygun ve yine mümkün olduğu kadar basit kurgulanmış bir model türetilmiş sistem denklemleri ile birlikte Şekil 4.1'de verilmektedir.

Bu modelin, kararlı durum analizi için analitik olarak çözümü yapılabilmekle birlikte çok uzun olacağı için burada gösterilmeyecektir. Dinamik çözüm ise analitik çözümün mümkün olduğu son seviyedir. Dinamik analitik çözümler özdeğer ve özvektörlerin hesaplanmasına bağlıdır ve özdeğerlerin hesaplanması sırasında bir karakteristik polinom elde edilmekte ve karakteristik polinomun köklerinin bulunması gerekmektedir. Uzun ve karmaşık olmakla birlikte, dördüncü dereceden herhangi bir polinomum sembolik hesaplar ile köklerinin elde edilmesi mümkündür. Ancak Ablel-Ruffini (Ruffini, 1799 ve Abel, 1824) teoremine göre daha yüksek mertebeden polinomların köklerini doğrudan veren ifadelerin elde edilmesi mümkün değildir. King (1996) bu imkansızlığın aşılması için bir yöntem önermekle birlikte ilgili yaklaşım halihazırda pratik değildir.



Şekil 4.1 Taban etkileşimli sulak alan modeli

Ancak gerçek modeller aslında daha da karmaşıktır. Örnek bir su ekosistemi modelinin yalnızca kompartımanları Şekil 4.2’de ilgili terimler ise Şekil 4.3’te verilmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi model doğrusal değildir ve birden çok besin elementi ve faktörün sınırlayıcı bir etkisi vardır. Bu durumda tam bir analitik çözüm zaten mümkün görünmemektedir.



Proses	Proses Hızının Matematiksel İfadesi	Birim
Ölü organik azotun mineralleşmesi	$k_{MINER,ORG,20} \cdot \theta_{MINER,ORG}^{(TEMP-20)} \cdot \frac{DOXY}{DOXY + k_{HS,MINER,DOXY}} \cdot DETN +$ $S_{O_2,C,Denitr} \cdot k_{DENITR,20} \cdot \theta_{DENITR}^{(TEMP-20)} \cdot \frac{K_{HS,DENITR,DOXY}}{DOXY + K_{HS,DENITR,DOXY}} \cdot NO3N \cdot \frac{DETN}{DETC}$	$gN \cdot m^{-3} \cdot gün^{-1}$
Nitrifikasyon	$k_{NITR,20} \cdot \theta_{NITR}^{(TEMP-20)} \cdot \frac{DOXY}{DOXY + k_{HS,NITR,DOXY}} \cdot NH4N$	$gN \cdot m^{-3} \cdot gün^{-1}$
Denitrifikasyon	$k_{DENITR,20} \cdot \theta_{DENITR}^{(TEMP-20)} \cdot \frac{K_{HS,DENITR,DOXY}}{DOXY + K_{HS,DENITR,DOXY}} \cdot NO3N$	$gN \cdot m^{-3} \cdot gün^{-1}$
Ölü organik fosforun mineralleşmesi	$k_{MINER,DETP,20} \cdot \theta_{MINER,DETP}^{(TEMP-20)} \cdot \frac{DOXY}{DOXY + k_{HS,MINER,DOXY}} \cdot DETP +$ $S_{O_2,C,Denitr} \cdot k_{DENITR,20} \cdot \theta_{DENITR}^{(TEMP-20)} \cdot \frac{K_{HS,DENITR,DOXY}}{DOXY + K_{HS,DENITR,DOXY}} \cdot NO3N \cdot \frac{DETP}{DETC}$	$gP \cdot m^{-3} \cdot gün^{-1}$
Atmosfer ile havalanma	$k_A \cdot (DOXY_{SAT} - DOXY)$ $DOXY_{SAT}$: Çözünmüş oksijenin sudaki doygunluk konsantrasyonu ($g \cdot m^{-3}$)	$gO_2 \cdot m^{-3} \cdot gün$
Ölü organik karbonun mineralleşmesi	$k_{MINER,DETC,20} \cdot \theta_{MINER,DETC}^{(TEMP-20)} \cdot \frac{DOXY}{DOXY + k_{HS,MINER,DOXY}} \cdot DETC$	$gC \cdot m^{-3} \cdot gün$
Genel birincil üreticinin çoğalması	$k_{GROW,GPPC,20} \cdot \theta_{GPPC,GROW}^{(TEMP-20)} \cdot \min(\lim_{LIGHT,GPPC}, \lim_{NUT,GPPC}) \cdot GPPC$ Işık sınırlama faktörü $\lim_{LIGHT,GPPC} = \frac{2.718 \cdot f_{DAY}}{k_E \cdot H} \cdot \left(\exp\left(-\frac{I_A}{I_{S,GPPC}} \cdot \exp(-1 \cdot k_E \cdot H)\right) - \exp\left(-\frac{I_A}{I_{S,GPPC}}\right) \right)$ Besin elementi sınırlama faktörü $\lim_{NUT} = \min\left(\frac{NH4N + NO3N}{k_{HS,N,GPPC} + NH4N + NO3N}, \frac{PO4P}{k_{HS,P,GPPC} + PO4P}\right)$	$gC \cdot m^{-3} \cdot gün^{-1}$
Genel birincil üreticinin solunumu	$k_{RESP,PHYC,20} \cdot \theta_{RESP,PHYC}^{(TEMP-20)} \cdot GPPC$	$gC \cdot m^{-3} \cdot gün^{-1}$
Genel birincil üreticinin ölümü	$k_{DEATH,GPPC,20} \cdot \theta_{DEATH,GPPC}^{(TEMP-20)} \cdot GPPC$	$gC \cdot m^{-3} \cdot gün^{-1}$
Fiksasyon yapan birincil üreticinin çoğalması	$k_{GROW,FXIC,20} \cdot \theta_{GROW,FXIC}^{(TEMP-20)} \cdot \min(\lim_{LIGHT,FXIC}, \lim_{NUT,FXIC}) \cdot FXIC$ Işık sınırlama faktörü $\lim_{LIGHT,FXIC} = \frac{2.718 \cdot f_{DAY}}{k_E \cdot H} \cdot \left(\exp\left(-\frac{I_A}{I_{S,FXIC}} \cdot \exp(-1 \cdot k_E \cdot H)\right) - \exp\left(-\frac{I_A}{I_{S,FXIC}}\right) \right)$ Besin elementi $\lim_{NUT,FXIC} = \min\left(\frac{k_{HS,N,FXIC}}{k_{HS,N,FXIC} + NH4N + NO3N}, \frac{PO4P}{k_{HS,P,FXIC} + PO4P}\right)$	$gC \cdot m^{-3} \cdot gün^{-1}$
Fiksasyon yapan birincil üreticinin solunumu	$k_{RESP,FXIC,20} \cdot \theta_{RESP,FXIC}^{(TEMP-20)} \cdot FXIC$	$gC \cdot m^{-3} \cdot gün^{-1}$
Fiksasyon yapan birincil üreticinin ölümü	$k_{DEATH,FXIC,20} \cdot \theta_{DEATH,FXIC}^{(TEMP-20)} \cdot FXIC$	$gC \cdot m^{-3} \cdot gün^{-1}$

Şekil 4.2 Genel bir su ekosistemi modelinin kinetik kompartımanları

Bu türdeki modeller söz konusu olunca analitik çözümler yapılabilmesi için öncelikle modelin doğrusallaştırılması gerekmektedir. Doğrusallaştırma modelin zamansal ayrıklaştırılması sırasında yapılabilir. Örneğin model Euler yöntemi gibi bir sayısal yöntemle çözülürken her zaman adımı için ayrı bir doğrusal denklem takımı türetilir. Daha sonra elde edilen homojen olmayan doğrusal diferansiyel denklem takımı, özdeğer yöntemleri ile çözülebilir. Eğer denklem takımı 4×4 'ten daha büyük bir tepki matrisi içeriyorsa özdeğerlerin ve özvektörlerin sembolik olarak çözülmesi mümkün değildir, ancak sayısal yöntemlerle hesaplanması durumunda analitik çözümü mümkündür ve sistemin anlık durumu sistemin başlangıç konsantrasyonları ve dış etkenler üzerinden tanımlanabilmektedir.

Terim	Birim	İlgili durum değişkeni	Tanım
$k_{MINER,DET N,20}$	$gün^{-1}$	DET N	20°C sıcaklıkta organik azotun mineralleşme hızı sabiti
$\theta_{MINER,DET N}$	-	DET N	$k_{MINER,DET N,20}$ için Arrhenius sıcaklık düzeltme faktörü
$k_{NITR,20}$	$gün^{-1}$	NH4N	20°C sıcaklıkta nitrifikasyon hızı sabiti
θ_{NITR}	-	NH4N	$k_{NITR,20}$ için Arrhenius sıcaklık düzeltme faktörü
$k_{HS,NITR,DOXY}$	$g\ O_2 \cdot m^{-3}$	NH4N	Nitrifikasyonda oksijen için Monod yarı doygunluk katsayısı
$k_{DENITR,20}$	$gün^{-1}$	NO3N	20°C sıcaklıkta denitrifikasyon hızı sabiti
θ_{DENITR}	-	NO3N	$k_{DENITR,20}$ için Arrhenius sıcaklık düzeltme faktörü
$k_{HS,DENITR,DOXY}$	$g\ O_2 \cdot m^{-3}$	NO3N	Deitrifikasyonda oksijen için Monod ters yarı doygunluk katsayısı
$k_{MINER,DETP,20}$	$gün^{-1}$	DETP	20°C sıcaklıkta organik fosforun mineralleşme hızı sabiti
$\theta_{MINER,DETP}$	-	DETP	$k_{MINER,DETP,20}$ için Arrhenius sıcaklık düzeltme faktörü
k_A	$gün^{-1}$	DOXY	20°C sıcaklıkta havalanma hızı sabiti
$k_{MINER,DETC,20}$	$gün^{-1}$	DETC	20°C sıcaklıkta organik karbonun mineralleşme hızı sabiti
$\theta_{MINER,DETC}$	-	DETC	$k_{MINER,DETC,20}$ için Arrhenius sıcaklık düzeltme faktörü
$k_{GROW,GPPC,20}$	$gün^{-1}$	GPPC	20°C sıcaklıkta genel birincil üretici çoğalma hızı sabiti
$\theta_{GROW,GPPC}$	-	GPPC	$k_{GROW,GPPC,20}$ için Arrhenius sıcaklık düzeltme faktörü
$k_{HS,N,GPPC}$	$g\ N \cdot m^{-3}$	GPPC	Genel birincil üretici çoğalmasında çözünmüş inorganik azot için Monod yarı doygunluk katsayısı
$k_{HS,P,GPPC}$	$g\ P \cdot m^{-3}$	GPPC	Genel birincil üretici çoğalmasında çözünmüş reaktif fosfor için Monod yarı doygunluk katsayısı
$k_{RESP,GPPC,20}$	$gün^{-1}$	GPPC	20°C sıcaklıkta genel birincil üretici solunum hızı sabiti
$\theta_{RESP,GPPC}$	-	GPPC	$k_{RESP,GPPC,20}$ için Arrhenius sıcaklık düzeltme faktörü
$k_{DEATH,GPPC,20}$	$gün^{-1}$	GPPC	20°C sıcaklıkta Birincil üretici mineralleşme hızı sabiti
$\theta_{DEATH,GPPC}$	-	GPPC	$k_{DEATH,GPPC,20}$ için Arrhenius sıcaklık düzeltme faktörü
$pref_{NH4N,PP}$	-	GPPC	Çözünmüş inorganik azot kaynağı olarak amonyum tercih faktörü $\frac{(k_{HS,NH4N,PREF} + NH4N) \cdot (k_{HS,NH4N,PREF} + NO3N)^+}{k_{HS,NH4N,PREF} \cdot NH4N}$
$k_{HS,NH4N,PREF}$	$g\ N \cdot m^{-3}$	GPPC	Amonyum tercihi için Monod yarı doygunluk katsayısı
$k_{GROW,FIXC,20}$	$gün^{-1}$	FIXC	20°C sıcaklıkta azot sabitleyebilen birincil üretici çoğalma hızı sabiti
$\theta_{GROW,FIXC}$	-	FIXC	$k_{GROW,FIXC,20}$ için Arrhenius sıcaklık düzeltme faktörü
$k_{HS,N,FIXC}$	$g\ N \cdot m^{-3}$	FIXC	Azot sabitleyebilen birincil üretici çoğalmasında çözünmüş inorganik azot için Monod yarı doygunluk katsayısı
$k_{HS,P,FIXC}$	$g\ P \cdot m^{-3}$	FIXC	Azot sabitleyebilen birincil üretici çoğalmasında çözünmüş reaktif fosfor için Monod yarı doygunluk katsayısı
$k_{RESP,FIXC,20}$	$gün^{-1}$	FIXC	20°C sıcaklıkta azot sabitleyebilen birincil üretici solunum hızı sabiti
$\theta_{RESP,FIXC}$	-	FIXC	$k_{RESP,FIXC,20}$ için Arrhenius sıcaklık düzeltme faktörü
$k_{DEATH,FIXC,20}$	$gün^{-1}$	FIXC	20°C sıcaklıkta azot sabitleyebilen birincil üretici ölüm hızı sabiti
$\theta_{DEATH,FIXC}$	-	FIXC	$k_{DEATH,FIXC,20}$ için Arrhenius sıcaklık düzeltme faktörü
k_E	m^{-1}	GPPC, FIXC	Klorofil-A'nın ışık sönmleme katsayısı $k_E = k_{B,E} + (8.8 \cdot 10^{-3} \cdot CHLA) + (5.4 \cdot 10^{-2} \cdot CHLA^2)$
$k_{B,E}$	m^{-1}	GPPC, FIXC	Suyun klorofil A haricinde ışık sönmleme katsayısı
CHLA	$\frac{mg}{CHLA \cdot m^{-3}}$	GPPC, FIXC	$1000 \cdot (S_{CHLA:C,PHYC} \cdot GPPC + S_{CHLA:C,FIXC} \cdot FIXC)$
GPPC: Birincil üretici karbonu, FIXC: Azot sabitleyebilen birincil üretici karbonu DETC, DETN, DETP: Sırasıyla ölü organik karbon, azot ve fosfor NH4N: Amonyum azotu, NO3N: Nitrat azotu S _{x,y} : X:Y stokiyometrik oranı (model için kütle dengeleri kurulurken durum değişkenlerinin birbirlerini etkilediği proseslerde stokiyometrik oranlar dikkate alınmalıdır)			

Şekil 4.3 Genel bir su ekosistemi modelinin ekosisteme özel parametre ve yardımcı değişkenleri

Bu çözümler daha uzun olmakla birlikte, Denklem 13 - Denklem 28'de verilen çözümlere benzemektedir, yalnızca özdeğerleri temsil eden ifadeleri kapalıdır. Genel bir durum için, böyle bir analitik çözümün türetilmesi Ek-B'de verilmektedir.

5. Sonuçlar

Kitap bölümü olarak yayınlanan bu çalışmada iklim değişikliğinin su kaynakları üzerindeki etkilerinin, su kalitesi ve su ekolojisi açısından sayısal olarak analizi edilmesini sağlayan bir modelleme yaklaşımı önerilmiştir. Önerilen yaklaşım, güncel modelleme çalışmalarında kullanılan çoğu su kalitesi/ekolojisi modelinden farklı olarak analitik çözümlere dayanmaktadır. Çalışmada analitik çözümlerle su kalitesi ve/veya su ekolojisi ile ilgili durum değişkenlerinin iklim değişiminin su kaynaklarına iki temel etki değişkeni olan yağış ve hava sıcaklığının doğrudan fonksiyonlarına nasıl dönüştürülebilecekleri gösterilmiştir.

Kısım 2 ve Kısım 3'te de görüldüğü gibi, basit su ekosistemi modellerinin yağış ve hava sıcaklığının fonksiyonları olarak ifade edilmeleri uzun denklemlere dönüşmelerine neden olmaktadır. İlgili denklemlerin doğrudan sunulmalarının çoğu okuyucunun önerilen modelleme yaklaşımını benimsememesi riskini doğuracaktır. Bu nedenle de ilgili kısımlarda denklemlerin en sade hallerinden mümkün olduğunca adım atlanmadan türetilişlerine yer verilerek önerilen yaklaşımın yöntemsel olarak takip edilebilmesine çaba gösterilmiştir. Önerilen model yaklaşımının yöntemsel olarak takip edilebilmesi, aynı yaklaşımın farklı araştırmacılar tarafından farklı modellere de uygulanabilmesini kolaylaştıracaktır.

Kısım 4'te, modelleme yaklaşımını gösterim amacı dışında kullanılabilecek daha gerçekçi modellere yer verilmiştir. Analitik çözümlerin uygulanabileceği son sınırlar ortaya koyulmuştur ve analitik çözümlerin ötesinde aynı modelleme yaklaşımın uygulanabilmesi için sayısal ve analitik çözümlerin nasıl birlikte kullanılabilecekleri yarı-analitik yaklaşım konusunda ipuçları verilmiş ve erilen ipuçlarına dayanarak yapılacak araştırmaların desteklenmesi amacıyla ilgili yarı-analitik yaklaşımın analitik çözümü türetilerek tüm ayrıntıları bu bölümün eklerinde (Ek-B) verilmiştir.

Bu çalışma kapsamında henüz gerçekleştirilmemiş ancak iklim değişikliğinin su ekosistemleri üzerindeki etkilerinin ortaya koyulması açısından önemli olabilecek ek çalışmalar ile ilgili öneriler aşağıda sıralanmıştır:

- Bu çalışmada, su ekosistemlerinin durumlarının yağış ve hava sıcaklığının doğrudan fonksiyonlarına nasıl dönüştürülebilecekleri ortaya koyulmuş ve basit bir örnek üzerinde gösterilmiştir. İlgili yöntemde, yağış ve hava sıcaklığındaki değişimlerin etkileri deterministik olarak hesaplanabilmektedir. Ancak bu iki hidrometeorolojik değişkenin de rastlantısal özellikleri vardır. Bu durumda bu durumda sunulan yaklaşım genişletilerek yağış ve hava sıcaklığı olasılık yoğunluk fonksiyonları kullanılıp üretilen bileşik fonksiyonlar ile daha ayrıntılı sonuçlar veren hesap altyapılarının oluşturulması mümkündür. Özellikle dinamik modelleme yaklaşımında ilgili iklim değişimi etkilerinin zamanda ilerleyişlerinde ekosistem tepkilerinin mevsimsel periyot, genel iklim değişimi eğilimi ve rastlantısal değişimler ile ilgili bileşenleri ayrı ayrı ortaya koyulabilir.

- Örnek olarak verilen ekosistem modellerinde, canlı bileşenler kapalı kutu olarak verilmiştir. Bunun nedeni ise, bu çalışmanın bir kitap bölümü hacmi ile sınırlı olmasıdır. Sunulan yaklaşımın temel bileşeni olarak geliştirilen modellerin genişletilerek su ekosistemlerinin besin ağları içindeki canlılar arasındaki etkileşimleri ve iklim değişikliğinin bu etkileşimleri hangi yönlerde doğru ve hangi şiddet ile değişmeye zorlamış olduğu geçmişe yönelik tahminlerinin ve zorlayabileceği geleceğe yönelik öngörülerinin yapılmalsını sağlayacak hale getirilmeleri mümkündür. Bu amaçla kurgulanacak bir modelin geliştirilmesindeki ilk adım olarak, Şekil 4.2 ve Şekil 4.3'te verilen genel amaçlı su ekosistemi modelinin Ek-B'deki analitik çözümlerle uyumlu biçime dönüştürülmesi ve hayata geçirilmesi önerilmektedir.

6. Kaynaklar / References

- Abel, Niels Henrik (1824). Mémoire sur les équations algébriques, ou l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré” (PDF), in Sylow, Ludwig; Lie, Sophus (eds.), Œuvres Complètes de Niels Henrik Abel (fransızca), Cilt 1(ikinci baskı), Grøndahl & Søn, pp. 28–33.
- Arceivala, S.J. (2002). Wastewater Treatment for Pollution Control and Reuse. Tata Publishing
- Chapra, S. C. (2008). Surface Water Quality Modeling. MacGraw Hill
- King, B. (1996). Beyond the Quartic Equation. Birkhauser yayın evi.
- Raudkivi, A.J. (1979). Hydrology: an advanced introduction to hydrological processes and modelling. Oxford, England: Pergamon.
- Ruffini, P. (1799). Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto (italyanca). Stamperia di S. Tommaso d'Aquino.
- Stefan, H.G., Preud'homme, E.B. (1993). Stream temperature estimation from air temperature. Water Resources Bulletin, 29(1), pp. 27-45.
- Streeter, H.W. and Phelps, E.B. (1925). A Study of the Pollution and Natural Purification of the Ohio River, U.S. Public Health Service Bulletin, No. 146, pp. 1-75.
- Thomann, R.V. and Mueller, J.A. (1987) Principles of Surface Water Quality Modeling and Control. New York: Harper-Collins.
- Vollenweider, R. A. (1975). Input-Output Models with Special Reference to Phosphorus Loading Concept in Limnology. *Schweizerische Zeitschrift für Hydrologie-Swiss Journal of Hydrology*, 37, pp. 53-84.

EK-A İki Doğrusal Diferansiyel Denklemden Oluşan Sabit Katsayılı Homojen Olmayan Diferansiyel Denklemler Takımının Çözümü

Bu ekte, bu bölümde verilen iki değişkenli dinamik model için elde edilecek sembolik çözümler problemiden bağımsız türetilmiştir.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem A.1})$$

$$t = 0; P_1(t) = P_{1,0}; P_2(t) = P_{2,0}$$

P : Analiz edilen sistemin durumunu temsil eden zamana bağlı, bağımlı değişken vektörü (durum değişkeni vektörü)

t : Zaman (bağımsız değişken)

W : Sisteme zamana bağlı olarak etki eden dış etki vektörü

$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix}$: Sistemin W dış etki vektörüne tepkisini temsil eden matris.

Öncelikle, Denklem 1 homojen duruma getirilip (Denklem A.2) çözülmelidir.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem A.2})$$

Bu amaçla; öncelikle katsayılar matrisinin öz değerleri sembolik olarak hesaplanmalıdır. Denklem A.1 göz önünde bulundurulduğunda özdeğerler, analiz edilen sistemin zamana bağlı değişimlerini temsil eden bileşenlerin içinde bulunan sabitler olacaklardır.

$$\det \left(\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (\text{Denklem A.3})$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} - \lambda & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{Denklem A.4})$$

$$(\alpha_{1,1} - \lambda) \cdot (\alpha_{2,2} - \lambda) - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \quad (\text{Denklem A.5})$$

$$\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,1} \cdot \lambda - \alpha_{2,2} \cdot \lambda + \lambda^2 - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \quad (\text{Denklem A.6})$$

$$\lambda^2 - (\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2}) \cdot \lambda + \alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \quad (\text{Denklem A.7})$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} \pm \sqrt{(\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2})^2 - 4 \cdot (\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1})}}{2} \quad (\text{Denklem A.8})$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} \pm \sqrt{\alpha_{1,1}^2 + 2 \cdot \alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} + \alpha_{2,2}^2 - 4 \cdot \alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}}}{2} \quad (\text{Denklem A.8})$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} \pm \sqrt{\alpha_{1,1}^2 - 2 \cdot \alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} + \alpha_{2,2}^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}}}{2} \quad (\text{Denklem A.9})$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} \pm \sqrt{(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}}}{2} \quad (\text{Denklem A.10})$$

Katsayılar matrisinin elemanları olan $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{2,2}$ terimlerinin sayısal büyüklükleri, analiz edilen sisteme göre pozitif veya negatif olabilen herhangi sayısal değerler alabilmektedirler. Bu nedenle Denklem A.10 ile hesaplanan özdeğerler; $\sqrt{(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}}$ ifadesine göre; sayısal büyüklükleri birbirlerinden farklı iki gerçekte sayı, sayısal değerleri birbirlerinin aynı tek gerçekte sayı ya da birbirlerinin eşleniği olan iki tane eşlenik karmaşık sayı alabilmektedirler. Bu üç durumun her birisi, Denklem A.2 için farklı bir biçimdeki bir çözüme karşı gelmektedir.

Durum I

Eğer $(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0$ ise

$$\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix} = S_1 \cdot \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + S_2 \cdot \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) \quad (\text{Denklem A.12})$$

$$\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \cdot v_{1,1} \\ S_1 \cdot v_{1,2} \end{bmatrix} \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \begin{bmatrix} S_2 \cdot v_{2,1} \\ S_2 \cdot v_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) \quad (\text{Denklem A.13})$$

Durum II

Eğer $(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0$ ise

$$\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix} = S_1 \cdot \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + S_2 \cdot \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) \quad (\text{Denklem A.14})$$

$$\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \cdot v_{1,1} \\ S_1 \cdot v_{1,2} \end{bmatrix} \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \begin{bmatrix} S_2 \cdot v_{2,1} \\ S_2 \cdot v_{2,2} \end{bmatrix} \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) \quad (\text{Denklem A.15})$$

Durum III

Eğer $(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0$ ise

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2}}{2} + \frac{\sqrt{(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}}}{2} \cdot i = g + z \cdot i \quad (\text{Denklem A.16})$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha_{1,1} + \alpha_{2,2}}{2} - \frac{\sqrt{(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}}}{2} \cdot i = g - z \cdot i \quad (\text{Denklem A.17})$$

$$\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix} = \exp(g \cdot t) \cdot \left(S_1 \cdot \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} \cdot \cos(z \cdot t) + S_2 \cdot \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \sin(z \cdot t) \right) \quad (\text{Denklem A.18})$$

$$\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix} = \exp(g \cdot t) \cdot \left(S_1 \cdot \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} \cdot \cos(z \cdot t) + S_2 \cdot \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \sin(z \cdot t) \right) \quad (\text{Denklem A.19})$$

S_1 ve S_2 terimleri, analiz edilen probleme göre değerler alacak sabitlerdir. Analiz edilecek problemde, bağımsız değişken zaman olduğu için, bu sabitlerin ifadeleri başlangıç koşulları kullanılarak belirlenecektir. Katsayılar matrisinin öz vektörü de zamana bağlı olmadığı için, sabit olarak verilebilmektedir.

$\beta = S_1 \cdot v_1, \gamma = S_1 \cdot v_{1,2}, \delta = S_2 \cdot v_{2,1}, \varepsilon = S_2 \cdot v_{2,2}$ tanımları yapılabilir ve zamana bağlı olmayan sabitler olarak ve analiz edilen probleme göre değerler alırlar. Bu yaklaşımın üstünlüğü, öz vektörlerin hesaplanmasının zor olduğu durumlarda (örneğin özdeğerlerin karmaşık oldukları durumlarda) özvektörlerin hesaplanmasına gerek kalmadan denklem takımının çözülmesinin mümkün olmasıdır.

$$P_1(t) = \begin{cases} \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0 \text{ ise} \\ \beta \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \delta \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) \\ \gamma \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \varepsilon \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) \\ \quad \square \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \text{ ise} \\ \beta \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \delta \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) \\ \gamma \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \varepsilon \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) \\ \quad \square \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0 \text{ ise} \\ \exp(g \cdot t) \cdot (\beta \cdot \cos(z \cdot t) + \delta \cdot \sin(z \cdot t)) \\ \exp(g \cdot t) \cdot (\gamma \cdot \cos(z \cdot t) + \varepsilon \cdot \sin(z \cdot t)) \end{cases} \quad (\text{Denklem A.20})$$

Denklem 20’de, Durum III için verilen çözümler;

$\exp(g \cdot t) \cdot (\beta \cdot \cos(z \cdot t) - \delta \cdot \sin(z \cdot t))$ ve $\exp(g \cdot t) \cdot (\gamma \cdot \cos(z \cdot t) + \varepsilon \cdot \sin(z \cdot t))$ daha önce benzer çözümler için verilen $\exp(g \cdot t) \cdot (\beta \cdot \cos(z \cdot t) - \delta \cdot \sin(z \cdot t))$ ve $\exp(g \cdot t) \cdot (\gamma \cdot \cos(z \cdot t) - \varepsilon \cdot \sin(z \cdot t))$ formlarından farklı görünmekle birlikte, $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ probleme özel sabitler olduklarından + ve – işaretlerini temsil eden 1 ve -1 katsayıları da bu sabitlerin içine gömülü olarak tanımlanabilir.

Yaklaşımın zayıflığı ise, iki denklem ancak dört bilinmeyen olmasıdır. Bu durumda iki başlangıç koşulu yeterli olmayacaktır. İki koşul daha gereklidir. Bu koşullar ise, sistemin zamana göre değişimini temsil eden türevler yardımıyla belirlenebilir. Buna göre $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sabitlerinin ifadelerini belirlemek için gerekli dört denklemin türetilişi aşağıda verilmektedir.

Denklem I

$$t = 0; P_1(t) = P_{1,0}$$

$$P_1(0) = P_{1,0} \quad (\text{Denklem A.21})$$

Denklem II

$$t = 0; P_2(t) = P_{2,0}$$

$$P_2(0) = P_{2,0} \quad (\text{Denklem A.22})$$

Denklem III

$$\left. \frac{dP_1(t)}{dt} \right|_{t=0} = \alpha_{1,1} \cdot P_1(0) + \alpha_{1,2} \cdot P_2(0) \quad (\text{Denklem A.23})$$

$$\left. \frac{dP_1(t)}{dt} \right|_{t=0} = \alpha_{1,1} \cdot P_{1,0} + \alpha_{1,2} \cdot P_{2,0} \quad (\text{Denklem A.24})$$

Denklem IV

$$\left. \frac{dP_1(t)}{dt} \right|_{t=0} = \alpha_{2,1} \cdot P_1(0) + \alpha_{2,2} \cdot P_2(0) \quad (\text{Denklem A.25})$$

$$\left. \frac{dP_2(t)}{dt} \right|_{t=0} = \alpha_{2,1} \cdot P_{1,0} + \alpha_{2,2} \cdot P_{2,0} \quad (\text{Denklem A.26})$$

Genel türetilişleri yukarıda verilen denklemlerin üç durum için farklı ifadeleri olacaktır. Başlangıç koşulları için Denklem A.28 elde edilmektedir.

$$P_{1,0} = P_{2,0} = \begin{cases} \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0 \text{ ise} \\ \quad \beta \cdot \exp(\lambda_1 \cdot 0) + \delta \cdot \exp(\lambda_2 \cdot 0) \\ \quad \gamma \cdot \exp(\lambda_1 \cdot 0) + \varepsilon \cdot \exp(\lambda_2 \cdot 0) \\ \quad \square \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \text{ ise} \\ \quad \beta \cdot \exp(\lambda_1 \cdot 0) + \delta \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot 0) \\ \quad \gamma \cdot \exp(\lambda_1 \cdot 0) + \varepsilon \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot 0) \\ \quad \square \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0 \text{ ise} \\ \quad \exp(g \cdot 0) \cdot (\beta \cdot \cos(z \cdot 0) + \delta \cdot \sin(z \cdot 0)) \\ \quad \exp(g \cdot 0) \cdot (\gamma \cdot \cos(z \cdot 0) + \varepsilon \cdot \sin(z \cdot 0)) \end{cases} \quad (\text{Denklem A.27})$$

$$P_{1,0} = P_{2,0} = \begin{cases} \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0 \text{ ise} \\ \quad \beta + \delta \\ \quad \gamma + \varepsilon \\ \quad \square \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \text{ ise} \\ \quad \beta \\ \quad \gamma \\ \quad \square \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0 \text{ ise} \\ \quad \beta \\ \quad \gamma \end{cases} \quad (\text{Denklem A.28})$$

Zamana göre türevlerin ifadeleri, Denklem A.29'da verilmiştir.

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \begin{cases} \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0 \text{ ise} \\ \beta \cdot \lambda_1 \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \delta \cdot \lambda_2 \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) \\ \gamma \cdot \lambda_1 \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \varepsilon \cdot \lambda_2 \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \text{ ise} \\ \beta \cdot \lambda_1 \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \delta \cdot (\lambda_2 + 1) \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) \\ \gamma \cdot \lambda_1 \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \varepsilon \cdot (\lambda_2 + 1) \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0 \text{ ise} \\ \beta \cdot \exp(g \cdot t) \cdot (\cos(z \cdot t) \cdot g - \sin(z \cdot t) \cdot z) + \\ \delta \cdot \exp(g \cdot t) \cdot (\cos(z \cdot t) \cdot z + \sin(z \cdot t) \cdot g) \\ \gamma \cdot \exp(g \cdot t) \cdot (\cos(z \cdot t) \cdot g - \sin(z \cdot t) \cdot z) \\ \varepsilon \cdot \exp(g \cdot t) \cdot (\cos(z \cdot t) \cdot z + \sin(z \cdot t) \cdot g) \end{cases} \quad (\text{Denklem A.29}^{12})$$

Denklem A.29'da zaman yerine sıfır koyulunca, başlangıç anındaki türevler elde edilmektedir (Denklem A.31). Denklem A.21, A.22, A.24, A.26 ve Denklem A. 31 birlikte ele alınarak, öz değerlerin tüm durumlarında, sabitlerini veren denklemler yazılabilir.

$$\frac{dP_1(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \begin{cases} \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0 \text{ ise} \\ \beta \cdot \lambda_1 \cdot \exp(\lambda_1 \cdot 0) + \delta \cdot \lambda_2 \cdot \exp(\lambda_2 \cdot 0) \\ \gamma \cdot \lambda_1 \cdot \exp(\lambda_1 \cdot 0) + \varepsilon \cdot \lambda_2 \cdot \exp(\lambda_2 \cdot 0) \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \text{ ise} \\ \beta \cdot \lambda_1 \cdot \exp(\lambda_1 \cdot 0) + \delta \cdot (\lambda_2 + 1) \cdot \exp(\lambda_2 \cdot 0) \\ \gamma \cdot \lambda_1 \cdot \exp(\lambda_1 \cdot 0) + \varepsilon \cdot (\lambda_2 + 1) \cdot \exp(\lambda_2 \cdot 0) \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0 \text{ ise} \\ \beta \cdot \exp(g \cdot 0) \cdot (\cos(z \cdot 0) \cdot g - \sin(z \cdot 0) \cdot z) + \\ \delta \cdot \exp(g \cdot 0) \cdot (\cos(z \cdot 0) \cdot z + \sin(z \cdot 0) \cdot g) \\ \gamma \cdot \exp(g \cdot 0) \cdot (\cos(z \cdot 0) \cdot g - \sin(z \cdot 0) \cdot z) + \\ \varepsilon \cdot \exp(g \cdot 0) \cdot (\cos(z \cdot 0) \cdot z + \sin(z \cdot 0) \cdot g) \end{cases} \quad (\text{Denklem A.30})$$

¹² $(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0$ durumu için çözümün türev ifadesinin için elde edilişi, aşağıda verilmekte olup, için aynı adımlar izlenmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{dP_1(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} (\exp(g \cdot t) \cdot (\beta \cdot \cos(z \cdot t) + \delta \cdot \sin(z \cdot t))) = \frac{d}{dt} (\exp(g \cdot t) \cdot \beta \cdot \cos(z \cdot t)) + \frac{d}{dt} (\exp(g \cdot t) \cdot \delta \cdot \sin(z \cdot t)) = \\ &= \beta \cdot \left(\frac{d}{dt} (\exp(g \cdot t) \cdot \cos(z \cdot t)) \right) + \delta \cdot \left(\frac{d}{dt} (\exp(g \cdot t) \cdot \sin(z \cdot t)) \right) = \\ &= \beta \cdot \left(\exp(g \cdot t) \cdot \frac{d}{dt} \cos(z \cdot t) + \cos(z \cdot t) \cdot \frac{d}{dt} \exp(g \cdot t) \right) + \delta \cdot \left(\exp(g \cdot t) \cdot \frac{d}{dt} \sin(z \cdot t) + \sin(z \cdot t) \cdot \frac{d}{dt} \exp(g \cdot t) \right) = \\ &= -\beta \cdot (\exp(g \cdot t) \cdot \sin(z \cdot t) \cdot z + \cos(z \cdot t) \cdot \exp(g \cdot t) \cdot g) + \delta \cdot (\exp(g \cdot t) \cdot \cos(z \cdot t) \cdot z + \sin(z \cdot t) \cdot \exp(g \cdot t) \cdot g) = \\ &= \beta \cdot \exp(g \cdot t) \cdot (\cos(z \cdot t) \cdot g - \sin(z \cdot t) \cdot z) + \delta \cdot \exp(g \cdot t) \cdot (\cos(z \cdot t) \cdot z + \sin(z \cdot t) \cdot g) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dP_1(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dP_2(t)}{dt} \end{array} \right|_{t=0} = \begin{cases} \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0 \text{ ise} \\ \quad \beta \cdot \lambda_1 + \delta \cdot \lambda_2 \\ \quad \gamma \cdot \lambda_1 + \varepsilon \cdot \lambda_2 \\ \quad \vdots \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \text{ ise} \\ \quad \beta \cdot \lambda_1 + \delta \cdot (\lambda_2 + 1) \\ \quad \gamma \cdot \lambda_1 + \varepsilon \cdot (\lambda_2 + 1) \\ \quad \vdots \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0 \text{ ise} \\ \quad \beta \cdot g + \delta \cdot z \\ \quad \gamma \cdot g + \varepsilon \cdot z \end{cases} \quad (\text{Denklem A.31})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0 \text{ ise} \\ \quad \beta + \delta = P_{1,0} \\ \quad \gamma + \varepsilon = P_{2,0} \\ \quad \lambda_1 \cdot \beta + \lambda_2 \cdot \delta = \alpha_{1,1} \cdot P_{1,0} + \alpha_{1,2} \cdot P_{2,0} \\ \quad \lambda_1 \cdot \gamma + \lambda_2 \cdot \varepsilon = \alpha_{2,1} \cdot P_{1,0} + \alpha_{2,2} \cdot P_{2,0} \\ \quad \vdots \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \text{ ise} \\ \quad \beta = P_{1,0} \\ \quad \gamma = P_{2,0} \\ \quad \lambda_1 \cdot \beta + (\lambda_2 + 1) \cdot \delta = \alpha_{1,1} \cdot P_{1,0} + \alpha_{1,2} \cdot P_{2,0} \\ \quad \lambda_1 \cdot \gamma + (\lambda_2 + 1) \cdot \varepsilon = \alpha_{2,1} \cdot P_{1,0} + \alpha_{2,2} \cdot P_{2,0} \\ \quad \vdots \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0 \text{ ise} \\ \quad \beta = P_{1,0} \\ \quad \gamma = P_{2,0} \\ \quad g \cdot \beta + z \cdot \delta = \alpha_{1,1} \cdot P_{1,0} + \alpha_{1,2} \cdot P_{2,0} \\ \quad g \cdot \gamma + z \cdot \varepsilon = \alpha_{2,1} \cdot P_{1,0} + \alpha_{2,2} \cdot P_{2,0} \end{array} \right. \quad (\text{Denklem A.32})$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0 \text{ ise} \\
\beta = P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{1,1} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
\gamma = P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{2,1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{2,2} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
\delta = P_{1,0} \cdot \left(1 - \frac{\alpha_{1,1} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) + P_{2,0} \cdot \frac{-\alpha_{1,2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
\varepsilon = P_{1,0} \cdot \frac{-\alpha_{2,1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + P_{2,0} \cdot \left(1 - \frac{\alpha_{2,2} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) \\
\text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \text{ ise} \\
\beta = P_{1,0} \\
\gamma = P_{2,0} \\
\delta = P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{1,1} - \lambda_1}{\lambda_2 + 1} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{\lambda_2 + 1} \\
\varepsilon = P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{2,1}}{\lambda_2 + 1} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{2,2} - \lambda_1}{\lambda_2 + 1} \\
\text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0 \text{ ise} \\
\beta = P_{1,0} \\
\gamma = P_{2,0} \\
\delta = P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{1,1} - g}{z} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{z} \\
\varepsilon = P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{2,1}}{z} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{2,2} - g}{z}
\end{array} \right. \quad (\text{Denklem A.33}^{13,14,15})$$

¹³ $(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0$ durumu için

¶enklem I ve II düzenlenerek $\delta = P_{1,0} - \beta$; $\varepsilon = P_{2,0} - \gamma$ sırasıyla ¶enklem III ve ¶enklem IV'te yerine koyulunca elde edilen $\lambda_1 \cdot \beta + \lambda_2 \cdot (P_{1,0} - \beta) = a_{1,1} \cdot P_{1,0} + a_{1,2} \cdot P_{2,0}$ ve $\lambda_1 \cdot \gamma + \lambda_2 \cdot (P_{2,0} - \gamma) = a_{2,1} \cdot P_{1,0} + a_{2,2} \cdot P_{2,0}$ denklemleri düzenlenip, $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \beta = P_{1,0} \cdot (a_{1,1} - \lambda_2) + a_{1,2} \cdot P_{2,0}$ ve $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \gamma = a_{2,1} \cdot P_{1,0} + P_{2,0} \cdot (a_{2,2} - \lambda_2)$, sırasıyla β ve γ sabitleri bu denklemlerin sol taraflarında yalnız bırakılarak, $\beta = P_{1,0} \cdot (a_{1,1} - \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2) + P_{2,0} \cdot a_{1,2} / (\lambda_1 - \lambda_2)$ ve $\gamma = P_{1,0} \cdot a_{2,1} / (\lambda_1 - \lambda_2) + P_{2,0} \cdot (a_{2,2} - \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2)$ sabitlerden ikisinin ifadesi elde edilir. β ve γ terimleri, $\delta = P_{1,0} - \beta$; $\varepsilon = P_{2,0} - \gamma$ yerlerine koyulunca; $\delta = P_{1,0} - P_{1,0} \cdot (a_{1,1} - \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2) - P_{2,0} \cdot a_{1,2} / (\lambda_1 - \lambda_2)$ ve $\varepsilon = P_{2,0} - P_{1,0} \cdot a_{2,1} / (\lambda_1 - \lambda_2) - P_{2,0} \cdot (a_{2,2} - \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2)$ denklemler $P_{1,0}$ ve $P_{2,0}$ parantezine alınınca $\delta = P_{1,0} \cdot (1 - (a_{1,1} - \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2)) + P_{2,0} \cdot (-a_{1,2}) / (\lambda_1 - \lambda_2)$ ve $\varepsilon = P_{1,0} \cdot (-a_{2,1}) / (\lambda_1 - \lambda_2) + P_{2,0} \cdot (1 - (a_{2,2} - \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2))$ elde δ ve ε sabitlerinin ifadeleri edilir.

¹⁴ $(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0$ durumu için

β ve γ sabitleri bilindiğinden, doğrudan Denklem III ve Denklem IV'te yerlerine koyularak çözümü δ ve ε sabitlerinin ifadeleri $\lambda_1 \cdot P_{1,0} + (\lambda_2 + 1) \cdot \delta = a_{1,1} \cdot P_{1,0} + a_{1,2} \cdot P_{2,0}$ ve $\lambda_1 \cdot P_{2,0} + (\lambda_2 + 1) \cdot \varepsilon = a_{2,1} \cdot P_{1,0} + a_{2,2} \cdot P_{2,0}$ olarak doğrudan elde edilir. δ ve ε sabitleri denklemlerde $(\lambda_2 + 1) \cdot \delta = a_{1,1} \cdot P_{1,0} - \lambda_1 \cdot P_{1,0} + a_{1,2} \cdot P_{2,0}$; $(\lambda_2 + 1) \cdot \varepsilon = a_{2,1} \cdot P_{1,0} + a_{2,2} \cdot P_{2,0} - \lambda_1 \cdot P_{2,0}$; $(\lambda_2 + 1) \cdot \delta = P_{1,0} \cdot (a_{1,1} - \lambda_1) + a_{1,2} \cdot P_{2,0}$, $(\lambda_2 + 1) \cdot \varepsilon = P_{1,0} \cdot a_{2,1} + P_{2,0} \cdot (a_{2,2} - \lambda_1)$ ve $\delta = P_{1,0} \cdot (a_{1,1} - \lambda_1) / (\lambda_2 + 1) + P_{2,0} \cdot a_{1,2} / (\lambda_2 + 1)$, $\varepsilon = P_{1,0} \cdot a_{2,1} / (\lambda_2 + 1) + P_{2,0} \cdot (a_{2,2} - \lambda_1) / (\lambda_2 + 1)$ işlemleri sonucunda yalnız bırakılmış ve ifadeleri düzenlenmiş olarak elde edilmiş olur.

¹⁵ $(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0$ durumu için

β ve γ sabitleri bilindiğinden, doğrudan Denklem III ve Denklem IV'te yerlerine koyularak çözümü δ ve ε sabitlerinin ifadeleri $g \cdot P_{1,0} + z \cdot \delta = a_{1,1} \cdot P_{1,0} + a_{1,2} \cdot P_{2,0}$ ve $g \cdot P_{2,0} + z \cdot \varepsilon = a_{2,1} \cdot P_{1,0} + a_{2,2} \cdot P_{2,0}$ olarak doğrudan elde edilir. δ ve ε sabitleri denklemlerde $z \cdot \delta = a_{1,1} \cdot P_{1,0} - g \cdot P_{1,0} + a_{1,2} \cdot P_{2,0}$; $z \cdot \varepsilon = a_{2,1} \cdot P_{1,0} + a_{2,2} \cdot P_{2,0} - g \cdot P_{2,0}$; $z \cdot \delta = P_{1,0} \cdot (a_{1,1} - g) + a_{1,2} \cdot P_{2,0}$; $z \cdot \varepsilon = P_{1,0} \cdot a_{2,1} + P_{2,0} \cdot (a_{2,2} - g)$ ve $\delta = P_{1,0} \cdot (a_{1,1} - g) / z + P_{2,0} \cdot a_{1,2} / z$, $\varepsilon = P_{1,0} \cdot a_{2,1} / z + P_{2,0} \cdot (a_{2,2} - g) / z$ işlemleri sonucunda yalnız bırakılmış ve ifadeleri düzenlenmiş olarak elde edilmiş olur.

(Denklem A.34)

(Denklem A.35)

Sistemin çözümü, homojen çözümler ile özel çözümlerin lineer kombinasyonudur (Denklem A.36)

$$\begin{bmatrix} P_1(t)_{HOMOJEN} \\ P_2(t)_{HOMOJEN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1(t)_{HOMOJEN} \\ P_2(t)_{HOMOJEN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1(t)_{ÖZEL} \\ P_2(t)_{ÖZEL} \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem A.36})$$

W(t) = W Olması Durumu İçin Çözüm

Bu durumda, homojen olmayan kısım zamana göre sabittir ve bu nedenle özel çözümlerin zamana göre türevleri sıfır olacaklarından, özel çözümler için sabit fonksiyonlar denenebilir (Denklem A.37).

$$\begin{bmatrix} P_{1,ÖZEL} \\ P_{2,ÖZEL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem A.37})$$

Denklem 37, v Denklem 1'de yerine koyulunca Denklem 39 elde edilir.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem A.38})$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem A.39})$$

Denklem A.39'un çözümü özel çözümleri verecektir (Denklem A.45)

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem A.40})$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem A.41})$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = - \frac{\begin{bmatrix} \alpha_{2,2} & -\alpha_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \alpha_{1,1} \end{bmatrix}}{\det \left(\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} \right)} \cdot \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem A.42})$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = - \frac{\begin{bmatrix} \alpha_{2,2} & -\alpha_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \alpha_{1,1} \end{bmatrix}}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} \cdot \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem A.43})$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{2,2}}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} & -\frac{\alpha_{1,2}}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} \\ -\frac{\alpha_{2,1}}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} & \frac{\alpha_{1,1}}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem A.44})$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W_1 \cdot \frac{\alpha_{2,2}}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} + W_2 \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} \\ W_1 \cdot \frac{\alpha_{2,1}}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} - W_2 \cdot \frac{\alpha_{1,1}}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem A.45})$$

Denklem A.45, Denklem A.37'de yerine koyularak özel çözümler elde edilir.

$$\begin{bmatrix} P_{1,\text{ÖZEL}} \\ \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} \\ P_{2,\text{ÖZEL}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W_1 \cdot \frac{\alpha_{2,2}}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} + W_2 \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} \\ W_1 \cdot \frac{\alpha_{2,1}}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} - W_2 \cdot \frac{\alpha_{1,1}}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem A.46})$$

$$\alpha'_{1,1} = -\frac{\alpha_{2,2}}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}}; \alpha'_{1,2} = \frac{\alpha_{1,2}}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}}; \alpha'_{2,1} = \frac{\alpha_{2,1}}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}} \quad \text{ve}$$

$$\alpha'_{2,2} = -\frac{\alpha_{1,1}}{\alpha_{1,1} \cdot \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}}$$

olarak tanımlanıp, Denklem 46 da yerlerine koyulduklarında (Denklem A.47 elde edilir).

$$\begin{bmatrix} P_{1,\text{ÖZEL}} \\ P_{2,\text{ÖZEL}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \cdot \alpha'_{1,1} + W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\ W_1 \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem A.47})$$

Denklem A.44 ve Denklem A.20, Denklem A.36 da yerlerine koyulduklarında Denklem A.48 elde edilir.

$$P_1(t) = \begin{cases} \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0 \text{ ise} \\ \beta \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \delta \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) + W_1 \cdot \alpha'_{1,1} + W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\ \gamma \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \varepsilon \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) + W_1 \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \\ \vdots \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \text{ ise} \\ \beta \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \delta \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) + W_1 \cdot \alpha'_{1,1} + W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\ \gamma \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \varepsilon \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) + W_1 \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \\ \vdots \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0 \text{ ise} \\ \exp(g \cdot t) \cdot (\beta \cdot \cos(z \cdot t) + \delta \cdot \sin(z \cdot t)) + W_1 \cdot \alpha'_{1,1} + W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\ \exp(g \cdot t) \cdot (\gamma \cdot \cos(z \cdot t) + \varepsilon \cdot \sin(z \cdot t)) + W_1 \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \end{cases} \quad (\text{Denklem A.48})$$

β , γ , δ , ε sabitlerinin ifadelerini belirlemek için gerekli dört denklemin ikisi başlangıç koşullarından diğer ikisi de başlangıç anındaki zamansal türevlerden elde edilecektir. Dört denklemin türetilişi aşağıda verilmektedir.

Denklem V

$$t = 0; P_1(t) = P_{1,0} \quad (\text{Denklem A.49})$$

$$P_1(0) = P_{1,0}$$

Denklem VI

$$t = 0; P_2(t) = P_{2,0} \quad (\text{Denklem A.50})$$

$$P_2(0) = P_{2,0}$$

Denklem VII

$$\left. \frac{dP_1(t)}{dt} \right|_{t=0} = \alpha_{1,1} \cdot P_1(0) + \alpha_{1,2} \cdot P_2(0) + W_1 \quad (\text{Denklem A.51})$$

$$\left. \frac{dP_1(t)}{dt} \right|_{t=0} = \alpha_{1,1} \cdot P_{1,0} + \alpha_{1,2} \cdot P_{2,0} + W_1 \quad (\text{Denklem A.52})$$

Denklem VIII

$$\left. \frac{dP_1(t)}{dt} \right|_{t=0} = \alpha_{2,1} \cdot P_1(0) + \alpha_{2,2} \cdot P_2(0) + W_2 \quad (\text{Denklem A.53})$$

$$\left. \frac{dP_2(t)}{dt} \right|_{t=0} = \alpha_{2,1} \cdot P_{1,0} + \alpha_{2,2} \cdot P_{2,0} + W_2$$

Denklem V ve Denklem VI'nın türetilmeleri için, Denklem A.48'de zaman yerine sıfır koyularak Denklem A.55 elde edilir. Homojen olmayan kısımlar zamana göre sabit olduklarından, zaman türevinin Denklem A.29'daki ifadeleri değişmeyecektir. Buna göre kurulan dört bilinmeyenli dört denklemden oluşan denklem takımı, Denklem A.56'da verilmektedir. Denklem takımının sabitleri için çözümü ise, Denklem A.57'de verilmektedir. Denklem A.57, Denklem A.48'de yerine koyulunca Denklem A.58, Denklem A.58 düzenlenince Denklem A.59 elde edilir.

$$P_{1,0} = \begin{cases} \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0 \text{ ise} \\ \quad \beta \cdot \exp(0) + \delta \cdot \exp(0) + W_1 \cdot \alpha'_{1,1} + W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\ \quad \gamma \cdot \exp(0) + \varepsilon \cdot \exp(0) + W_1 \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \\ \quad \square \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \text{ ise} \\ \quad \beta \cdot \exp(0) + \delta \cdot t \cdot \exp(0) + W_1 \cdot \alpha'_{1,1} + W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\ \quad \gamma \cdot \exp(0) + \varepsilon \cdot t \cdot \exp(0) + W_1 \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \\ \quad \square \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0 \text{ ise} \\ \quad \exp(0) \cdot (\beta \cdot \cos(0) + \delta \cdot \sin(0)) + W_1 \cdot \alpha'_{1,1} + W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\ \quad \exp(0) \cdot (\gamma \cdot \cos(0) + \varepsilon \cdot \sin(0)) + W_1 \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \end{cases} \quad (\text{Denklem A.54})$$

$$\begin{aligned}
\begin{matrix} P_{1,0} \\ P_{2,0} \end{matrix} &= \begin{cases} \begin{aligned} &E\check{g}er \left(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2} \right)^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0 \text{ ise} \\ &\beta + \delta + W_1 \cdot \alpha'_{1,1} + W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\ &\gamma + \varepsilon + W_1 \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \end{aligned} \\ \\ \begin{aligned} &E\check{g}er \left(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2} \right)^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \text{ ise} \\ &\beta + W_1 \cdot \alpha'_{1,1} + W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\ &\gamma + W_1 \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \end{aligned} \\ \\ \begin{aligned} &E\check{g}er \left(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2} \right)^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0 \text{ ise} \\ &\beta + W_1 \cdot \alpha'_{1,1} + W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\ &\gamma + W_1 \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \end{aligned} \end{cases} \quad (\text{Denklem A.55})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{matrix} P_{1,0} \\ P_{2,0} \end{matrix} &= \begin{cases} \begin{aligned} &E\check{g}er \left(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2} \right)^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0 \text{ ise} \\ &\beta + \delta = P_{1,0} - W_1 \cdot \alpha'_{1,1} - W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\ &\gamma + \varepsilon = P_{2,0} - W_1 \cdot \alpha'_{2,1} - W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \\ &\lambda_1 \cdot \beta + \lambda_2 \cdot \delta = \alpha_{1,1} \cdot P_{1,0} + \alpha_{1,2} \cdot P_{2,0} + W_1 \\ &\lambda_1 \cdot \gamma + \lambda_2 \cdot \varepsilon = \alpha_{2,1} \cdot P_{1,0} + \alpha_{2,2} \cdot P_{2,0} + W_2 \end{aligned} \\ \\ \begin{aligned} &E\check{g}er \left(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2} \right)^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \text{ ise} \\ &\beta = P_{1,0} - W_1 \cdot \alpha'_{1,1} - W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\ &\gamma = P_{2,0} - W_1 \cdot \alpha'_{2,1} - W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \\ &\lambda_1 \cdot \beta + (\lambda_2 + 1) \cdot \delta = \alpha_{1,1} \cdot P_{1,0} + \alpha_{1,2} \cdot P_{2,0} + W_1 \\ &\lambda_1 \cdot \gamma + (\lambda_2 + 1) \cdot \varepsilon = \alpha_{2,1} \cdot P_{1,0} + \alpha_{2,2} \cdot P_{2,0} + W_2 \end{aligned} \\ \\ \begin{aligned} &E\check{g}er \left(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2} \right)^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0 \text{ ise} \\ &\beta = P_{1,0} - W_1 \cdot \alpha'_{1,1} - W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\ &\gamma = P_{2,0} - W_1 \cdot \alpha'_{2,1} - W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \\ &g \cdot \beta + z \cdot \delta = \alpha_{1,1} \cdot P_{1,0} + \alpha_{1,2} \cdot P_{2,0} + W_1 \\ &g \cdot \gamma + z \cdot \varepsilon = \alpha_{2,1} \cdot P_{1,0} + \alpha_{2,2} \cdot P_{2,0} + W_2 \end{aligned} \end{cases} \quad (\text{Denklem A.56})
\end{aligned}$$

$$P_{1,0} = \begin{cases} \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0 \text{ ise} \\ \quad \beta = P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{1,1} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{\lambda_1 - \lambda_2} + W_1 \cdot \frac{1 + \lambda_2 \cdot \alpha'_{1,1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + W_2 \cdot \frac{\lambda_2 \cdot \alpha'_{1,2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \quad \gamma = P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{2,1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{2,2} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + W_1 \cdot \frac{\lambda_2 \cdot \alpha'_{2,1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + W_2 \cdot \frac{1 + \lambda_2 \cdot \alpha'_{2,2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \quad \delta = P_{1,0} \cdot \left(1 - \frac{\alpha_{1,1} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{\lambda_1 - \lambda_2} + W_1 \cdot \left(-\alpha'_{1,1} - \frac{1 + \lambda_2 \cdot \alpha'_{1,1}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) + W_2 \cdot \left(-\alpha'_{1,2} - \frac{\lambda_2 \cdot \alpha'_{1,2}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) \\ \quad \varepsilon = P_{1,0} \cdot \frac{-\alpha_{2,1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + P_{2,0} \cdot \left(1 - \frac{\alpha_{2,2} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) + W_1 \cdot \left(-\alpha'_{2,1} - \frac{\lambda_2 \cdot \alpha'_{2,1}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) + W_2 \cdot \left(-\alpha'_{2,2} - \frac{1 + \lambda_2 \cdot \alpha'_{2,2}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) \\ \quad \vdots \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \text{ ise} \\ \quad \beta = P_{1,0} - W_1 \cdot \alpha'_{1,1} - W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\ \quad \gamma = P_{2,0} - W_1 \cdot \alpha'_{2,1} - W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \\ \quad \delta = P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{1,1} - \lambda_1}{\lambda_2 + 1} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{\lambda_2 + 1} + W_1 \cdot \frac{1 + \lambda_1 \cdot \alpha'_{1,1}}{\lambda_2 + 1} + W_2 \cdot \frac{\lambda_1 \cdot \alpha'_{1,2}}{\lambda_2 + 1} \\ \quad \varepsilon = P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{2,1}}{\lambda_2 + 1} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{2,2} - \lambda_1}{\lambda_2 + 1} + W_1 \cdot \frac{\lambda_1 \cdot \alpha'_{2,1}}{\lambda_2 + 1} + W_2 \cdot \frac{1 + \lambda_1 \cdot \alpha'_{2,2}}{\lambda_2 + 1} \\ \quad \vdots \\ \text{Eğer } (\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0 \text{ ise} \\ \quad \beta = P_{1,0} - W_1 \cdot \alpha'_{1,1} - W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\ \quad \gamma = P_{2,0} - W_1 \cdot \alpha'_{2,1} - W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \\ \quad \delta = P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{1,1} - g}{z} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{z} + W_1 \cdot \frac{1 + g \cdot \alpha'_{1,1}}{z} + W_2 \cdot \frac{g \cdot \alpha'_{1,2}}{z} \\ \quad \varepsilon = P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{2,1}}{z} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{2,2} - g}{z} + W_1 \cdot \frac{g \cdot \alpha'_{2,1}}{z} + W_2 \cdot \frac{1 + g \cdot \alpha'_{2,2}}{z} \end{cases}$$

(Denklem A.57^{16*17*18})

¹⁶ $(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0$ durumu için

Denklem V ve VI düzenlenerek $\delta = P_{1,0} \cdot W_1 \cdot \alpha'_{1,1} - W_2 \cdot \alpha'_{1,2} - \beta$; $\varepsilon = P_{2,0} \cdot W_1 \cdot \alpha'_{2,1} - W_2 \cdot \alpha'_{2,2} - \gamma$ sırasıyla Denklem VII ve Denklem VIII'de yerine koyulunca elde edilen $\lambda_1 \cdot \beta + \lambda_2 \cdot (P_{1,0} \cdot W_1 \cdot \alpha'_{1,1} - W_2 \cdot \alpha'_{1,2} - \beta) = a_{1,1} \cdot P_{1,0} + a_{1,2} \cdot P_{2,0} + W_1 \cdot \lambda_1 \cdot \gamma + \lambda_2 \cdot (P_{2,0} \cdot W_1 \cdot \alpha'_{2,1} - W_2 \cdot \alpha'_{2,2} - \gamma) = a_{2,1} \cdot P_{1,0} + a_{2,2} \cdot P_{2,0} + W_2 \cdot \lambda_2 \cdot \delta$ denklemleri düzenlenip, $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \beta = P_{1,0} \cdot (a_{1,1} - \lambda_2) + a_{1,2} \cdot P_{2,0} + W_1 \cdot \lambda_1 \cdot \gamma + W_2 \cdot \lambda_2 \cdot \alpha'_{1,2} \text{ ve } (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \gamma = a_{2,1} \cdot P_{1,0} + P_{2,0} \cdot (a_{2,2} - \lambda_2) + W_1 \cdot \lambda_2 \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot \lambda_2 \cdot \alpha'_{2,2}$ sırasıyla β ve γ sabitleri bu denklemlerin sol taraflarında yalnız bırakılarak, $\beta = P_{1,0} \cdot (a_{1,1} - \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2) + P_{2,0} \cdot a_{1,2} / (\lambda_1 - \lambda_2) + W_1 \cdot (1 + \lambda_2 \cdot \alpha'_{1,1}) / (\lambda_1 - \lambda_2) + W_2 \cdot (\lambda_2 \cdot \alpha'_{1,2}) / (\lambda_1 - \lambda_2)$ ve $\gamma = P_{1,0} \cdot a_{2,1} / (\lambda_1 - \lambda_2) + P_{2,0} \cdot (a_{2,2} - \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2) + W_1 \cdot \lambda_2 \cdot \alpha'_{2,1} / (\lambda_1 - \lambda_2) + W_2 \cdot \lambda_2 \cdot \alpha'_{2,2} / (\lambda_1 - \lambda_2)$ olarak elde edilir. β ve γ terimleri, $\delta = P_{1,0} \cdot W_1 \cdot \alpha'_{1,1} - W_2 \cdot \alpha'_{1,2} - \beta$; $\varepsilon = P_{2,0} \cdot W_1 \cdot \alpha'_{2,1} - W_2 \cdot \alpha'_{2,2} - \gamma$ yerlerine koyulunca; $\delta = P_{1,0} \cdot W_1 \cdot \alpha'_{1,1} - W_2 \cdot \alpha'_{1,2} - P_{1,0} \cdot (a_{1,1} - \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2) - P_{2,0} \cdot a_{1,2} / (\lambda_1 - \lambda_2) - W_1 \cdot (1 + \lambda_2 \cdot \alpha'_{1,1}) / (\lambda_1 - \lambda_2) - W_2 \cdot (\lambda_2 \cdot \alpha'_{1,2}) / (\lambda_1 - \lambda_2)$ ve $\varepsilon = P_{2,0} \cdot W_1 \cdot \alpha'_{2,1} - W_2 \cdot \alpha'_{2,2} - P_{1,0} \cdot a_{2,1} / (\lambda_1 - \lambda_2) - P_{2,0} \cdot (a_{2,2} - \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2) - W_1 \cdot \lambda_2 \cdot \alpha'_{2,1} / (\lambda_1 - \lambda_2) - W_2 \cdot \lambda_2 \cdot \alpha'_{2,2} / (\lambda_1 - \lambda_2)$ denklemleri $P_{1,0}$, $P_{2,0}$, W_1 , W_2 , parantezlerine alınıp $\delta = P_{1,0} \cdot (1 - (a_{1,1} - \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2)) + P_{2,0} \cdot a_{1,2} / (\lambda_1 - \lambda_2) + W_1 \cdot (-a'_{1,1} - (1 + \lambda_2 \cdot \alpha'_{1,1}) / (\lambda_1 - \lambda_2)) + W_2 \cdot (-a'_{1,2} - (\lambda_2 \cdot \alpha'_{1,2}) / (\lambda_1 - \lambda_2))$ ve $\varepsilon = P_{1,0} \cdot (-a_{2,1} / (\lambda_1 - \lambda_2) + P_{2,0} \cdot (1 - (a_{2,2} - \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2)) + W_1 \cdot (-a'_{2,1} - (\lambda_2 \cdot \alpha'_{2,1}) / (\lambda_1 - \lambda_2)) + W_2 \cdot (-a'_{2,2} - (1 + \lambda_2 \cdot \alpha'_{2,2}) / (\lambda_1 - \lambda_2))$ olarak δ ve ε sabitlerinin ifadeleri edilir.

¹⁷ $(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0$ durumu için

β ve γ sabitleri bilindiğinden, doğrudan Denklem VII ve Denklem VIII'de yerlerine koyularak çözümü δ ve ε sabitlerinin ifadeleri

$\lambda_1 \cdot (P_{1,0} \cdot W_1 \cdot \alpha'_{1,1} - W_2 \cdot \alpha'_{1,2}) + (\lambda_1 + 1) \cdot \delta = a_{1,1} \cdot P_{1,0} + a_{1,2} \cdot P_{2,0} + W_1 \cdot \lambda_1 \cdot (P_{2,0} \cdot W_1 \cdot \alpha'_{2,1} - W_2 \cdot \alpha'_{2,2}) + (\lambda_2 + 1) \cdot \varepsilon = a_{2,1} \cdot P_{1,0} + a_{2,2} \cdot P_{2,0} + W_2 \cdot \lambda_2 \cdot \delta$ olarak doğrudan elde edilir. δ ve ε sabitleri denklemlerde $(\lambda_2 + 1) \cdot \delta = a_{1,1} \cdot P_{1,0} - \lambda_1 \cdot P_{1,0} + a_{1,2} \cdot P_{2,0} + W_1 \cdot \lambda_1 \cdot \alpha'_{1,1} + W_2 \cdot \lambda_1 \cdot \alpha'_{1,2} + (\lambda_2 + 1) \cdot \varepsilon = a_{2,1} \cdot P_{1,0} + a_{2,2} \cdot P_{2,0} - \lambda_1 \cdot P_{1,0} + W_1 \cdot \lambda_1 \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot \lambda_1 \cdot \alpha'_{2,2} + (\lambda_2 + 1) \cdot \delta = P_{1,0} \cdot (a_{1,1} - \lambda_1) + a_{1,2} \cdot P_{2,0} + W_1 \cdot (1 + \lambda_1 \cdot \alpha'_{1,1}) + W_2 \cdot \lambda_1 \cdot \alpha'_{1,2} + (\lambda_2 + 1) \cdot \varepsilon = P_{1,0} \cdot a_{2,1} + P_{2,0} \cdot (a_{2,2} - \lambda_1) + W_1 \cdot \lambda_1 \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot (1 + \lambda_1 \cdot \alpha'_{2,1})$ ve $\delta = P_{1,0} \cdot (a_{1,1} - \lambda_1) / (\lambda_2 + 1) + P_{2,0} \cdot a_{1,2} / (\lambda_2 + 1) + W_1 \cdot (1 + \lambda_1 \cdot \alpha'_{1,1}) / (\lambda_2 + 1) + W_2 \cdot (\lambda_1 \cdot \alpha'_{1,2}) / (\lambda_2 + 1)$, $\varepsilon = P_{1,0} \cdot a_{2,1} / (\lambda_2 + 1) + P_{2,0} \cdot (a_{2,2} - \lambda_1) / (\lambda_2 + 1) + W_1 \cdot \lambda_1 \cdot \alpha'_{2,1} / (\lambda_2 + 1) + W_2 \cdot (1 + \lambda_1 \cdot \alpha'_{2,1}) / (\lambda_2 + 1)$ işlemleri sonucunda yalnız bırakılmış ve ifadeleri düzenlenmiş olarak elde edilmiş olur.

¹⁸ $(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2})^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0$ durumu için

β ve γ sabitleri bilindiğinden, doğrudan Denklem VII ve Denklem VIII'de yerlerine koyularak çözümü δ ve ε sabitlerinin ifadeleri $g \cdot (P_{1,0} \cdot W_1 \cdot \alpha'_{1,1} - W_2 \cdot \alpha'_{1,2}) + z \cdot \delta = a_{1,1} \cdot P_{1,0} + a_{1,2} \cdot P_{2,0} + W_1 \cdot g \cdot (P_{2,0} \cdot W_1 \cdot \alpha'_{2,1} - W_2 \cdot \alpha'_{2,2}) + z \cdot \varepsilon = a_{2,1} \cdot P_{1,0} + a_{2,2} \cdot P_{2,0} + W_2 \cdot \lambda_2 \cdot \delta$ olarak doğrudan elde edilir. δ ve ε sabitleri denklemlerde $z \cdot \delta = a_{1,1} \cdot P_{1,0} - \lambda_1 \cdot P_{1,0} + a_{1,2} \cdot P_{2,0} + W_1 \cdot g \cdot \alpha'_{1,1} + W_2 \cdot g \cdot \alpha'_{1,2} + z \cdot \varepsilon = a_{2,1} \cdot P_{1,0} + a_{2,2} \cdot P_{2,0} - \lambda_1 \cdot P_{1,0} + W_1 \cdot g \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot g \cdot \alpha'_{2,2} + z \cdot \delta = P_{1,0} \cdot (a_{1,1} - \lambda_1) + a_{1,2} \cdot P_{2,0} + W_1 \cdot (1 + g \cdot \alpha'_{1,1}) + W_2 \cdot g \cdot \alpha'_{1,2} + z \cdot \varepsilon = P_{1,0} \cdot a_{2,1} + P_{2,0} \cdot (a_{2,2} - \lambda_1) + W_1 \cdot g \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot (1 + g \cdot \alpha'_{2,1})$ ve $\delta = P_{1,0} \cdot (a_{1,1} - g) / z + P_{2,0} \cdot a_{1,2} / z + W_1 \cdot (1 + g \cdot \alpha'_{1,1}) / z + W_2 \cdot (g \cdot \alpha'_{1,2}) / z$, $\varepsilon = P_{1,0} \cdot a_{2,1} / z + P_{2,0} \cdot (a_{2,2} - g) / z + W_1 \cdot g \cdot \alpha'_{2,1} / z + W_2 \cdot (1 + g \cdot \alpha'_{2,1}) / z$ işlemleri sonucunda yalnız bırakılmış ve ifadeleri düzenlenmiş olarak elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& E\ddot{g}er \left(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2} \right)^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0 \text{ ise} \\
& \left(P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{1,1} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{\lambda_1 - \lambda_2} + W_1 \cdot \frac{1 + \lambda_2 \cdot \alpha'_{1,1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + W_2 \cdot \frac{\lambda_2 \cdot \alpha'_{1,2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \\
& \left(P_{1,0} \cdot \left(1 - \frac{\alpha_{1,1} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{\lambda_1 - \lambda_2} + W_1 \cdot \left(-\alpha'_{1,1} - \frac{1 + \lambda_2 \cdot \alpha'_{1,1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) + W_2 \cdot \left(-\alpha'_{1,2} - \frac{\lambda_2 \cdot \alpha'_{1,2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \right) \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) + \\
& W_1 \cdot \alpha'_{1,1} + W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\
& \quad \square \\
& \left(P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{2,1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{2,2} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + W_1 \cdot \frac{\lambda_2 \cdot \alpha'_{2,1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + W_2 \cdot \frac{1 + \lambda_2 \cdot \alpha'_{2,2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \\
& \left(P_{1,0} \cdot \frac{-\alpha_{2,1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + P_{2,0} \cdot \left(1 - \frac{\alpha_{2,2} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) + W_1 \cdot \left(-\alpha'_{2,1} - \frac{\lambda_2 \cdot \alpha'_{2,1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) + W_2 \cdot \left(-\alpha'_{2,2} - \frac{1 + \lambda_2 \cdot \alpha'_{2,2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \right) \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) + \\
& W_1 \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \\
& \quad \square \\
& \quad \square \\
& E\ddot{g}er \left(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2} \right)^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \text{ ise} \\
& \left(P_{1,0} - W_1 \cdot \alpha'_{1,1} - W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \right) \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \\
& \left(P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{1,1} - \lambda_1}{\lambda_2 + 1} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{\lambda_2 + 1} + W_1 \cdot \frac{1 + \lambda_1 \cdot \alpha'_{1,1}}{\lambda_2 + 1} + W_2 \cdot \frac{\lambda_1 \cdot \alpha'_{1,2}}{\lambda_2 + 1} \right) \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) + W_1 \cdot \alpha'_{1,1} + W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\
& \quad \square \\
& \left(P_{2,0} - W_1 \cdot \alpha'_{2,1} - W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \right) \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) + \\
& \left(P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{2,1}}{\lambda_2 + 1} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{2,2} - \lambda_1}{\lambda_2 + 1} + W_1 \cdot \frac{\lambda_1 \cdot \alpha'_{2,1}}{\lambda_2 + 1} + W_2 \cdot \frac{1 + \lambda_1 \cdot \alpha'_{2,2}}{\lambda_2 + 1} \right) \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) + W_1 \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \\
& \quad \square \\
& \quad \square \\
& E\ddot{g}er \left(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2} \right)^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0 \text{ ise} \\
& \exp(g \cdot t) \cdot \left(\left(P_{1,0} - W_1 \cdot \alpha'_{1,1} - W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \right) \cdot \cos(z \cdot t) + \right. \\
& \quad \left. \left(P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{1,1} - g}{z} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{z} + W_1 \cdot \frac{1 + g \cdot \alpha'_{1,1}}{z} + W_2 \cdot \frac{g \cdot \alpha'_{1,2}}{z} \right) \cdot \sin(z \cdot t) \right) + W_1 \cdot \alpha'_{1,1} + W_2 \cdot \alpha'_{1,2} \\
& \quad \square \\
& \exp(g \cdot t) \cdot \left(\left(P_{2,0} - W_1 \cdot \alpha'_{2,1} - W_2 \cdot \alpha'_{2,2} \right) \cdot \cos(z \cdot t) + \right. \\
& \quad \left. \left(P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{2,1}}{z} + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{2,2} - g}{z} + W_1 \cdot \frac{g \cdot \alpha'_{2,1}}{z} + W_2 \cdot \frac{1 + g \cdot \alpha'_{2,2}}{z} \right) \cdot \sin(z \cdot t) \right) + W_1 \cdot \alpha'_{2,1} + W_2 \cdot \alpha'_{2,2}
\end{aligned} \right\} \begin{matrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{matrix}
\end{aligned}$$

(Denklem A.58)

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& E\ddot{g}er \left(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2} \right)^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} > 0 \text{ ise} \\
& P_{1,0} \cdot \left(\frac{\alpha_{1,1} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \left(\exp(\lambda_1 \cdot t) - \exp(\lambda_2 \cdot t) \right) + \exp(\lambda_2 \cdot t) \right) + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \left(\exp(\lambda_1 \cdot t) - \exp(\lambda_2 \cdot t) \right) + \\
& W_1 \cdot \left(\frac{1 + \lambda_2 \cdot \alpha'_{1,1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \left(\exp(\lambda_1 \cdot t) - \exp(\lambda_2 \cdot t) \right) + \alpha'_{1,1} \cdot (1 - \exp(\lambda_2 \cdot t)) \right) + W_2 \cdot \left(\frac{\lambda_2 \cdot \alpha'_{1,2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \left(\exp(\lambda_1 \cdot t) - \exp(\lambda_2 \cdot t) \right) + \alpha'_{1,2} \cdot (1 - \exp(\lambda_2 \cdot t)) \right) \\
& \quad \quad \quad \square \\
& P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{2,1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \left(\exp(\lambda_1 \cdot t) - \exp(\lambda_2 \cdot t) \right) + P_{2,0} \cdot \left(\frac{\alpha_{2,2} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \left(\exp(\lambda_1 \cdot t) - \exp(\lambda_2 \cdot t) \right) + \exp(\lambda_2 \cdot t) \right) + \\
& W_1 \cdot \left(\frac{\lambda_2 \cdot \alpha'_{2,1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \left(\exp(\lambda_1 \cdot t) - \exp(\lambda_2 \cdot t) \right) + \alpha'_{2,1} \cdot (1 - \exp(\lambda_2 \cdot t)) \right) + W_2 \cdot \left(\frac{1 + \lambda_2 \cdot \alpha'_{2,2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \left(\exp(\lambda_1 \cdot t) - \exp(\lambda_2 \cdot t) \right) + \alpha'_{2,2} \cdot (1 - \exp(\lambda_2 \cdot t)) \right) \\
& \quad \quad \quad \square \\
& \quad \quad \quad \square \\
& E\ddot{g}er \left(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2} \right)^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = 0 \text{ ise} \\
& P_{1,0} \cdot \left(\exp(\lambda_1 \cdot t) + \frac{\alpha_{1,1} - \lambda_1}{\lambda_2 + 1} \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) \right) + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{\lambda_2 + 1} \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) + \\
& W_1 \cdot \left(\frac{1 + \lambda_1 \cdot \alpha'_{1,1}}{\lambda_2 + 1} \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) + \alpha'_{1,1} \cdot (1 - \exp(\lambda_1 \cdot t)) \right) + W_2 \cdot \left(\frac{\lambda_1 \cdot \alpha'_{1,2}}{\lambda_2 + 1} \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) + \alpha'_{1,2} \cdot (1 - \exp(\lambda_1 \cdot t)) \right) \\
& \quad \quad \quad \square \\
& P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{2,1}}{\lambda_2 + 1} \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) + P_{2,0} \cdot \left(\exp(\lambda_1 \cdot t) + \frac{\alpha_{2,2} - \lambda_1}{\lambda_2 + 1} \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) \right) + \\
& W_1 \cdot \left(\frac{\lambda_1 \cdot \alpha'_{2,1}}{\lambda_2 + 1} \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) + \alpha'_{2,1} \cdot (1 - \exp(\lambda_1 \cdot t)) \right) + W_2 \cdot \left(\frac{1 + \lambda_1 \cdot \alpha'_{2,2}}{\lambda_2 + 1} \cdot t \cdot \exp(\lambda_2 \cdot t) + \alpha'_{2,2} \cdot (1 - \exp(\lambda_1 \cdot t)) \right) \\
& \quad \quad \quad \square \\
& \quad \quad \quad \square \\
& E\ddot{g}er \left(\alpha_{1,1} - \alpha_{2,2} \right)^2 + 4 \cdot \alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} < 0 \text{ ise} \\
& P_{1,0} \cdot \left(\cos(z \cdot t) \cdot \exp(g \cdot t) + \frac{\alpha_{1,1} - g}{z} \cdot \sin(z \cdot t) \cdot \exp(g \cdot t) \right) + P_{2,0} \cdot \frac{\alpha_{1,2}}{z} \cdot \sin(z \cdot t) \cdot \exp(g \cdot t) + \\
& W_1 \cdot \left(\frac{1 + g \cdot \alpha'_{1,1}}{z} \cdot \sin(z \cdot t) \cdot \exp(g \cdot t) + \alpha'_{1,1} \cdot (1 - \cos(z \cdot t) \cdot \exp(g \cdot t)) \right) + W_2 \cdot \left(\frac{g \cdot \alpha'_{1,2}}{z} \cdot \sin(z \cdot t) \cdot \exp(g \cdot t) + \alpha'_{1,2} \cdot (1 - \cos(z \cdot t) \cdot \exp(g \cdot t)) \right) \\
& \quad \quad \quad \square \\
& P_{1,0} \cdot \frac{\alpha_{2,1}}{z} \cdot \sin(z \cdot t) \cdot \exp(g \cdot t) + P_{2,0} \cdot \left(\cos(z \cdot t) \cdot \exp(g \cdot t) + \frac{\alpha_{2,2} - g}{z} \cdot \sin(z \cdot t) \cdot \exp(g \cdot t) \right) + \\
& W_1 \cdot \left(\frac{g \cdot \alpha'_{2,1}}{z} \cdot \sin(z \cdot t) \cdot \exp(g \cdot t) + \alpha'_{2,1} \cdot (1 - \cos(z \cdot t) \cdot \exp(g \cdot t)) \right) + W_2 \cdot \left(\frac{1 + g \cdot \alpha'_{2,2}}{z} \cdot \sin(z \cdot t) \cdot \exp(g \cdot t) + \alpha'_{2,2} \cdot (1 - \cos(z \cdot t) \cdot \exp(g \cdot t)) \right)
\end{aligned} \right\} \begin{matrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{matrix}
\end{aligned}$$

(Denklem A.59)

EK-B Dört Kompartmandan Daha Çok Sayıda Bileşen İçeren Doğrusal Modeller İçin Analitik Bir Çözüm Önerisi

Abel-Ruffini teoremine göre, katsayılar matrisi 4 x 4'ten büyük ise bu mümkün değildir. Ancak bu çalışmada, çözümlerin analitik olarak yapılması gerekli görülmektedir. Bu ekte sabit katsayılı homojen olmayan ancak homojen olmayan terimi sabit olan bir doğrusal diferansiyel denklem takımının başlangıç koşulları ve dış zorlayıcı etkenlerin etkilerini birbirlerinden ayrı fonksiyonlar ile ifade edebilen bir analitik çözüm türetilenmektedir. Burada en önemli koşul, katsayılar matrisinin özdeğerlerinin ve özvektörlerinin sayısal olarak hesaplanabilmesi ve katsayılar matrisinin tersinin alınabiliyor olmasıdır.

$$\frac{d}{dt}[P_i(t)]_{n \times 1} = [A]_{n \times n} \cdot [P_i(t)]_{n \times 1} + [B_i]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.1})$$

Denklem B.1'de; İlgilenilen problemde analiz edilen sisteme göre

- n : Bileşen sayısını temsil eden skaler
- $[A]_{n \times n}$: Dış etkenlere verilen tepkiyi temsil eden katsayılar matrisi
- $[B_i]_{n \times 1}$: Etki eden dış etkenler vektörü
- $[P_i(t)]_{n \times 1}$: Bağımlı değişken (durum değişkeni) için çözüm vektörü
- t : Bağımsız değişken

anlamındadır. Amaç, Denklem B.1'in biçimi Denklem B.2'de verilen bir çözümünü elde etmektir.

$$[P_i(t)]_{n \times 1} = \underbrace{f_{BAS}(t) \cdot [P_{0,i}]_{n \times 1}}_{\text{Başlangıç koşullarının etkisi}} + \underbrace{f_{DIŞ}(t) \cdot [B_i]_{n \times 1}}_{\text{Dış etkenlerin etkisi}} \quad (\text{Denklem B.2})$$

Denklem B.2'de

- $[P_{0,i}]_{n \times 1}$: t=0 için sistemin durumunu temsil eden başlangıç koşulları vektörü
- $f_{BAS}(t)$: t'nin bir fonksiyonu olarak başlangıç koşullarının sistemin durumu üzerindeki etkisini ortaya koyan çarpan fonksiyonu
- $f_{DIŞ}(t)$: t'nin bir fonksiyonu olarak dış etkenlerin sistemin durumu üzerindeki etkisini ortaya koyan çarpan fonksiyonu

anlamındadır. Bu tür bir çözüm; iki, üç ve dört bileşenden oluşan sistemler için sembolik olarak yapılabilmektedir. Ancak beş ve daha büyük sistemler için özdeğer ve özvektörlerin özel durumlar dışında sembolik olarak elde edilememeleri nedeniyle analitik çözümler elde edilebilmekle birlikte özdeğer ve özvektörler ancak sayısal olarak hesaplanabilmekte ve bu nedenle çözümlerin sembolik olarak ifade edilmesi mümkün olamamakla birlikte, bu ekte en azından denklem takımı çözümlerinin sistemin başlangıç koşullarının ve dış etkenlerinin birer fonksiyonu olarak gösterebilen biçimdeki bir çözümünün nasıl elde edilebileceği gösterilmiştir.

B.1 Denklem Takımının Özdeğer ve Özvektörler Kullanılarak Çözülmesi

Amaca ulaşmak için; Denklem B.1 ile verilen diferansiyel denklem takımının çözülmesi gerekmektedir. İlgili çözümün ilk adımı temsil edilen ve homojen olmayan sistemin homojen çözümünün elde edilmesidir. Denklem B.1'in homojen hali ise Denklem B.3 olup

$$\frac{d}{dt}[P_i(t)]_{n \times 1} = [A]_{n \times n} \cdot [P_i(t)]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.3})$$

çözümünün bariz yapısı, Denklem B.4'te verilmektedir.

$$[P_i(t)]_{n \times 1, H} = \sum_{i=1}^n (C_{H,i} \cdot [v_i]_{n \times 1} \cdot f_i(\lambda_i, t)) \quad (\text{vDenklem B.4})$$

Denklem B.4'te;

$[P_i(t)]_{n \times 1, H}$: Bağımsız değişkenin bir fonksiyonu olan homojen çözüm

λ_i : $[A]_{(n \times n)}$ matrisinin i indeksi özdeğeri¹⁹

$[v_i]_{n \times 1}$: λ_i özdeğerine karşı gelen özvektör

$f_i(\lambda_i)$: λ_i ve t'nin bir fonksiyonu olan homojen çözüm bileşeni²⁰

$C_{H,i}$: Sayısal değeri homojenleştirilmiş probleme göre oluşan i indeksli keyfi sabit

anlamındadır. ve t'nin bir fonksiyonu olan homojen çözüm bileşeninin bilinen genel özelliği Denklem B.5'te verilmektedir.

$$f_i(\lambda_i, 0) = 1 \quad (\text{Denklem B.5})$$

¹⁹ Eğer ≤ 4 ise analitik veya simgesel olarak belirlenebilir, değilse özel durumlar haricinde ancak sayısal olarak hesaplanabilir.

²⁰ Bu fonksiyonlar; özdeğerlerin gerçek, karmaşık ya da tekrarlı olmaları durumuna göre farklı biçimlerde olacaktırlar. Ayrıntılar B.2 kısmında verilmiştir.

Bağımsız değişken t için tanımlanan başlangıç koşulu,

$$t=0; [P_i(t)]_{n \times I, H} = [P_{0,i}]_{n \times I} \quad (\text{Denklem B.6})$$

Denklem B.5 ve C.6; Denklem B.4'te yerine koyulduğunda

$$[P_{0,i}]_{n \times I} = \sum_{i=1}^n (C_{H,i} \cdot [v_i]_{n \times I}) = C_{H,1} \cdot [v_1]_{n \times I} + C_{H,2} \cdot [v_2]_{n \times I} + \dots + C_{H,n} \cdot [v_n]_{n \times I} \quad (\text{Denklem B.7})$$

Denklem B.7 elde edilir. olarak tanımlanırsa ²¹; Denklem B.7, Denklem B.8'e dönüşür.²²

$$[E_\lambda]_{n \times n} \cdot [C_{H,i}]_{n \times I} = [P_{0,i}]_{n \times I} \quad (\text{Denklem B.8})$$

Denklem B.8 doğrusal bir denklem takımı olup, $[E_\lambda]_{n \times n}$ özdeğer ve özvektör hesabı sonucunda belirlemiş olduğundan ve $[P_{0,i}]_{n \times I}$ problemin başlangıç koşulu olarak tanımlanmış olduğu için bilindiğinden, herhangi bir yöntem ile çözülebilir ve homojen çözüm için probleme göre oluşan i indeksli keyfi sabitlerin tümü belirlenmiş olur. Denklem B.4'te homojen olmayan terim bulunmadığına göre; $[P_{0,i}]_{n \times I}$ ve $[B]_{n \times I}$ dikkate alındığında, $[C_{H,i}]_{n \times I}$ yalnızca $[P_{0,i}]_{n \times I}$ vektörünün bir fonksiyonudur (Denklem B.9).

$$[C_{H,i}]_{n \times I} = f_{H,i}([P_{0,i}]_{n \times I}) \quad (\text{Denklem B.9})$$

Denklem B.1'in çözümü ise homojen çözüm ile homojen olmayan çözümün doğrusal kombinasyonudur (Denklem B.10).

$$[P_i(t)]_{n \times I} = \left(\sum_{i=1}^n (C_{T,i} \cdot [v_i]_{n \times I} \cdot f_i(\lambda_i, t)) \right) + [P_i(t)]_{n \times I, P} \quad (\text{Denklem B.10})$$

Bu denklemde,

$C_{T,i}$: Sayısal değeri probleme göre oluşan i indeksli keyfi sabit

$[P_i(t)]_{n \times I, P}$: Denklem B.1'in özel çözümü

anlamındadır. Homojen olmayan terim, bağımsız değişkene göre sabit olduğundan bu terimin etkisi ile ilgili çözümün ifadesinin bağımsız değişkene göre türevi de sıfıra eşit olacaktır (Denklem B.11).

$$\frac{d}{dt} [P_{0,i}]_{n \times I, P} = 0 \quad (\text{Denklem B.11})$$

²¹ Bu tanım, lineer cebirde özuzay olarak bilinmektedir.

²² $\sum_{i=1}^n (C_{H,i} \cdot [v_i]_{n \times I}) = \sum_{i=1}^n ([v_i]_{n \times I} \cdot C_{H,i}) = \underbrace{[[v_1]_{n \times I}, [v_2]_{n \times I}, \dots, [v_n]_{n \times I}]}_{[E_\lambda]_{n \times n}} \cdot [C_{H,i}]_{n \times I}$

Öte yandan, özel çözüm, Denklem B.1'i sağlamalıdır (Denklem B.12).

$$\frac{d}{dt}[P_{i,0}]_{n \times 1,P} = [A]_{n \times n} \cdot [P_{0,i}]_{n \times 1,P} + [B_i]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.12})$$

Denklem B.11 ve Denklem B.12'den elde edilen Denklem B.13 elde edilir.

$$\frac{d}{dt}[P_{i,0}]_{n \times 1,P} = [A]_{n \times n} \cdot [P_{0,i}]_{n \times 1,P} + [B_i]_{n \times 1} = 0 \quad (\text{Denklem B.13})$$

Denklem B.13 düzenlenince doğrusal bir denklem takımı olan Denklem B.14 elde edilir.

$$[A]_{n \times n} \cdot [P_{0,i}]_{n \times 1,P} = -[B_i]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.14})$$

Denklem B.14'ün iki tarafı katsayılar matrisinin tersi ile çarpılırsa; özel çözüm, , homojen olmayan terimin bir vektör fonksiyonu olarak elde edilir.

$$[P_{0,i}]_{n \times 1,P} = -inv([A]_{n \times n}) \cdot [B_i]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.15})$$

İfadesinden de anlaşılacağı gibi, özel çözüm $[P_{0,i}]_{n \times 1}$ ve $[B_i]_{n \times 1}$ dikkate alındığında, $[C_{T,i}]_{n \times 1}$ yalnızca

$[B_i]_{n \times 1}$ vektörünün bir fonksiyonudur. Denklem B.15'in sağ tarafı, Denklem B.10'da yerine koyulunca, Denklem B.16 elde edilir.

$$[P(t)]_{n \times 1} = \left(\sum_{i=1}^n (C_{T,i} \cdot [v_i]_{n \times 1} \cdot f_i(\lambda_i, t)) \right) - inv([A]_{n \times n}) \cdot [B_i]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.16})$$

$C_{T,i}$ keyfi sabitlerini elde etmek için başlangıç koşulu, Denklem B.16'da yerine koyulduğunda Denklem B.17 elde edilir.

$$[P_{i,0}]_{n \times 1} = \left(\sum_{i=1}^n (C_{T,i} \cdot [v_i]_{n \times 1}) \right) - inv([A]_{n \times n}) \cdot [B_i]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.17})$$

olarak tanımlanıp Denklem B.17'de yerine koyulunca Denklem B.18, Denklem B.18 düzenlenince Denklem B.19 elde edilir.

$$[P_{i,0}]_{n \times 1} = [E_\lambda]_{n \times n} \cdot [C_{T,i}]_{n \times 1} - inv([A]_{n \times n}) \cdot [B_i]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.18})$$

$$[E_\lambda]_{n \times n} \cdot [C_{T,i}]_{n \times 1} = [P_{0,i}]_{n \times 1} + inv([A]_{n \times n}) \cdot [B_i]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.19})$$

Doğrusal bir denklem takımı olan Denklem B.19 çözülünce keyfi sabitleri elde edilecektir. Burada dikkat edilmesi gereken; keyfi sabitlerinin yalnızca ve dikkate alındığında, yalnızca bağımsız değişkene göre başlangıç koşullarını temsil eden vektörünün bir fonksiyonu olan (Denklem B.9) sabitlerinden farklı olarak hem vektörünün hem de homojen olmayan bileşeni temsil eden vektörünün fonksiyonu olmasıdır (Denklem B.20).

$$[C_{T,i}]_{n \times 1} = f_{T,i}([P_{0,i}]_{n \times 1}, [B]_{n \times 1}) \quad (\text{Denklem B.20})$$

Denklem B.8 ve C.19 düzenlenince, sırasıyla

$$[P_{0,i}]_{n \times 1} = [E_\lambda]_{n \times n} \cdot [C_{H,i}]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.21})$$

$$[P_{0,i}]_{n \times 1} = [E_\lambda]_{n \times n} \cdot [C_{T,i}]_{n \times 1} - \text{inv}([A]_{n \times n}) \cdot [B_i]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.22})$$

Denklem B.21 ve Denklem B.22 elde edilmektedir. Hem Denklem B.21 hem de Denklem B.22'nin sol tarafları başlangıç koşulunu temsil eden vektörüne ve bu nedenle birbirlerine eşit oldukları için, sağ tarafları da birbirlerine eşitlenebilir ve bu işlem sonucunda Denklem B.23 elde edilir.

$$[E_\lambda]_{n \times n} \cdot [C_{T,i}]_{n \times 1} - [E_\lambda]_{n \times n} \cdot [C_{H,i}]_{n \times 1} = \text{inv}([A]_{n \times n}) \cdot [B_i]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.23})$$

Denklem B.23 düzenlenerek Denklem B.26 elde edilir.

$$[E_\lambda]_{n \times n} \cdot ([C_{T,i}]_{n \times 1} - [C_{H,i}]_{n \times 1}) = \text{inv}([A]_{n \times n}) \cdot [B_i]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.24})$$

$$\begin{aligned} \text{inv}([E_\lambda]_{n \times n}) \cdot [E_\lambda]_{n \times n} \cdot ([C_{T,i}]_{n \times 1} - [C_{H,i}]_{n \times 1}) \\ = \text{inv}([E_\lambda]_{n \times n}) \cdot \text{inv}([A]_{n \times n}) \cdot [B_i]_{n \times 1} \end{aligned} \quad (\text{Denklem B.25})$$

$$[C_{T,i}]_{n \times 1} - [C_{H,i}]_{n \times 1} = \text{inv}([E_\lambda]_{n \times n}) \cdot \text{inv}([A]_{n \times n}) \cdot [B_i]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.26})$$

Denklem B.26'ya yakından bakıldığında

$$\underbrace{[C_{T,i}]_{n \times 1}}_{f_{T,i}([P_{i,0}]_{n \times 1}, [B]_{n \times 1})} - \underbrace{[C_{H,i}]_{n \times 1}}_{f_{H,i}([P_{i,0}]_{n \times 1})} = \underbrace{\text{inv}([E_\lambda]_{n \times n}) \cdot \text{inv}([A]_{n \times n}) \cdot [B_i]_{n \times 1}}_{\frac{f_A([A]_{n \times n})}{f_B([A]_{n \times n}, [B_i]_{n \times 1})}}$$

$[C_{T,i}]_{n \times 1} - [C_{H,i}]_{n \times 1}$ farkının, $[P_{0,i}]_{n \times 1}$ ve $[B_i]_{n \times 1}$ vektörleri dikkate alınınca, yalnızca $[B_i]_{n \times 1}$ vektörüne bağlı bir fonksiyon olduğu anlaşılmaktadır. Bu durum, Denklem B.27 ve Denklem B.28 ile temsil edilmiştir.

$$[C_{T,i}]_{n \times 1} - [C_{H,i}]_{n \times 1} = [C_{P,i}]_{n \times 1} = f_P([B_i]_{n \times 1}) \quad (\text{Denklem B.27})$$

$$[C_{T,i}]_{n \times 1} = [C_{H,i}]_{n \times 1} + [C_{P,i}]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.28})$$

Denklem B.28'in sağ tarafı Denklem B.10'da yerine koyulup düzenlenince Denklem B.31 elde edilir.

$$[P_i(t)]_{n \times 1} = \sum_{i=1}^n \left((C_{H,i} + C_{P,i}) \cdot [v_i]_{n \times 1} \cdot f_i(\lambda_i, t) \right) + [P_i(t)]_{n \times 1, P} \quad (\text{Denklem B.29})$$

$$[P_i(t)]_{n \times 1} = \sum_{i=1}^n \left(C_{H,i} \cdot [v_i]_{n \times 1} \cdot f_i(\lambda_i, t) + C_{P,i} \cdot [v_i]_{n \times 1} \cdot f_i(\lambda_i, t) \right) + [P_i(t)]_{n \times 1, P} \quad (\text{Denklem B.30})$$

$$[P_i(t)]_{n \times 1} = \sum_{i=1}^n \left(C_{H,i} \cdot [v_i]_{n \times 1} \cdot f_i(\lambda_i, t) \right) + \sum_{i=1}^n \left(C_{P,i} \cdot [v_i]_{n \times 1} \cdot f_i(\lambda_i, t) \right) + [P_i(t)]_{n \times 1, P} \quad (\text{Denklem B.31})$$

Denklem B.1'in özel çözümü olan Denklem B.15'in sağ tarafı Denklem B.31 de yerine koyulup düzenlenince Denklem B.32 elde edilir.

$$[P_i(t)]_{n \times 1} = \sum_{i=1}^n \left([v_i]_{n \times 1} \cdot C_{H,i} \cdot f_i(\lambda_i, t) \right) + \sum_{i=1}^n \left([v_i]_{n \times 1} \cdot C_{P,i} \cdot f_i(\lambda_i, t) \right) - \text{inv}([A]_{n \times n}) \cdot [B_i]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.32})$$

$[v_i]_{n \times 1}$ ve $\text{inv}([A]_{n \times n})$; sırasıyla Denklem B.33 ve Denklem B.34'te verilmektedir.

$$[v_i]_{n \times 1} = \begin{bmatrix} v_{1,i} \\ v_{2,i} \\ \vdots \\ v_{n-1,i} \\ v_{n,i} \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem B.33})$$

$$\text{inv}([A]_{n \times n}) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{Denklem B.34})$$

Denklem B.33 ve Denklem B.34'ün sağ tarafları, Denklem B.32'de yerlerine koyulup düzenlendiklerinde Denklem B.36,

$$[P_i(t)]_{n \times 1} = \sum_{i=1}^n \left(\begin{bmatrix} v_{1,i} \\ v_{2,i} \\ \vdots \\ v_{n-1,i} \\ v_{n,i} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{C_{H,i} \cdot f_i(\lambda_i, t)}_{S_{H,i}} \right) +$$

(Denklem B.35)

$$\sum_{i=1}^n \left(\begin{bmatrix} v_{1,i} \\ v_{2,i} \\ \vdots \\ v_{n-1,i} \\ v_{n,i} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{C_{P,i} \cdot f_i(\lambda_i, t)}_{S_{P,i}} \right) - \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}^{-1} \cdot [B_i]_{n \times 1}$$

$$[P_i(t)]_{n \times 1} = \sum_{i=1}^n \left(\begin{bmatrix} v_{1,i} \\ v_{2,i} \\ \vdots \\ v_{n-1,i} \\ v_{n,i} \end{bmatrix} \cdot S_{H,i} \right) +$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\begin{bmatrix} v_{1,i} \\ v_{2,i} \\ \vdots \\ v_{n-1,i} \\ v_{n,i} \end{bmatrix} \cdot S_{P,i} \right) - \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}^{-1} \cdot [B_i]_{n \times 1}$$

(Denklem B.36)

Denklem B.36'deki toplam ifadelerinin açılmasıyla Denklem B.37 ve Denklem B.38 elde edilir.

$$\sum_{i=1}^n \left(\begin{bmatrix} v_{1,i} \\ v_{2,i} \\ \vdots \\ v_{n-1,i} \\ v_{n,i} \end{bmatrix} \cdot S_{H,i} \right) = \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ \vdots \\ v_{n-1,1} \\ v_{n,1} \end{bmatrix} \cdot S_{H,1} + \begin{bmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \\ \vdots \\ v_{n-1,2} \\ v_{n,2} \end{bmatrix} \cdot S_{H,2} + \cdots + \begin{bmatrix} v_{1,n-1} \\ v_{2,n-1} \\ \vdots \\ v_{n-1,n-1} \\ v_{n,n-1} \end{bmatrix} \cdot S_{H,n-1} + \begin{bmatrix} v_{1,n} \\ v_{2,n} \\ \vdots \\ v_{n-1,n} \\ v_{n,n} \end{bmatrix} \cdot S_{H,n}$$

$$= \begin{bmatrix} v_{1,1} \cdot S_{H,1} + v_{2,1} \cdot S_{H,2} + \cdots + v_{1,n-1} \cdot S_{H,n-1} + v_{1,n} \cdot S_{H,n} \\ v_{2,1} \cdot S_{H,1} + v_{2,2} \cdot S_{H,2} + \cdots + v_{2,n-1} \cdot S_{H,n-1} + v_{2,n} \cdot S_{H,n} \\ \vdots \\ v_{n-1,1} \cdot S_{H,1} + v_{n-1,2} \cdot S_{H,2} + \cdots + v_{n-1,n-1} \cdot S_{H,n-1} + v_{n-1,n} \cdot S_{H,n} \\ v_{n,1} \cdot S_{H,1} + v_{n,2} \cdot S_{H,2} + \cdots + v_{n,n-1} \cdot S_{H,n-1} + v_{n,n} \cdot S_{H,n} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,n-1} & v_{1,n} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,n-1} & v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{n-1,1} & v_{n-1,2} & \cdots & v_{n-1,n-1} & v_{n-1,n} \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \cdots & v_{n,n-1} & v_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{H,1} \\ S_{H,2} \\ \vdots \\ S_{H,n-1} \\ S_{H,n} \end{bmatrix}$$

(Denklem B.37)

$$\sum_{i=1}^n \left(\begin{bmatrix} v_{1,i} \\ v_{2,i} \\ \vdots \\ v_{n-1,i} \\ v_{n,i} \end{bmatrix} \cdot S_{P,i} \right) = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,n-1} & v_{1,n} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,n-1} & v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{n-1,1} & v_{n-1,2} & \cdots & v_{n-1,n-1} & v_{n-1,n} \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \cdots & v_{n,n-1} & v_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{P,1} \\ S_{P,2} \\ \vdots \\ S_{P,n-1} \\ S_{P,n} \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem B.38})$$

Daha önceden de belirlenmiş olduğu gibi, Denklem B.37 ve Denklem B.38 deki matris, aslında Denklem B.1'deki matrisinin $([A]_{n \times n})$ özuzayına $([E_\lambda]_{n \times n})$ eşittir (Denklem B.39).

$$\begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,n-1} & v_{1,n} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,n-1} & v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{n-1,1} & v_{n-1,2} & \cdots & v_{n-1,n-1} & v_{n-1,n} \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \cdots & v_{n,n-1} & v_{n,n} \end{bmatrix} = [E_\lambda]_{n \times n} \quad (\text{Denklem B.39})$$

$S_{H,i}$ ve $S_{P,i}$ terimlerine yakından bakıldığında

$$\begin{aligned} S_{P,i} &= \frac{C_{P,i}}{f_P([B_i]_{n \times 1})} \cdot f_i(\lambda_i, t) \Rightarrow \begin{bmatrix} S_{H,1} \\ S_{H,2} \\ \vdots \\ S_{H,n-1} \\ S_{H,n} \end{bmatrix} = [S_{P,i}]_{n \times 1} = [C_{P,i} \cdot f_i(\lambda_i, t)]_{n \times 1} \\ &= f_{SP}([B_i]_{n \times 1}, [\lambda_i]_{n \times 1}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{H,i} &= \frac{C_{H,i}}{f_{H,i}(P_{i,0})} \cdot f_i(\lambda_i, t) \Rightarrow \begin{bmatrix} S_{H,1} \\ S_{H,2} \\ \vdots \\ S_{H,n-1} \\ S_{H,n} \end{bmatrix} = [S_{H,i}]_{n \times 1} = [C_{H,i} \cdot f_i(\lambda_i, t)]_{n \times 1} \\ &= f_{SH}([P_{0,i}]_{n \times 1}, [\lambda_i]_{n \times 1}, t) \end{aligned}$$

$[S_{H,i}]_{n \times 1}$, $[S_{P,i}]_{n \times 1}$ vektör fonksiyonlarının yapısı daha net anlaşılır. Buna göre; $[S_{H,i}]_{n \times 1}$ başlangıç koşulları vektörünün $([P_{0,i}]_{n \times 1})$, $[S_{P,i}]_{n \times 1}$ ise dış etkenler vektörünün $([B_i]_{n \times 1})$ fonksiyonlarıdır. Denklem B.34'ün sol tarafı ve Denklem B.37, C.38 ve C.39'un sağ tarafları, Denklem B.36'da yerlerine koyulduklarında, Denklem B.40 elde edilmektedir.

$$[P_i(t)]_{n \times 1} = [E_\lambda]_{n \times n} \cdot [S_{H,i}]_{n \times 1} + [E_\lambda]_{n \times n} \cdot [S_{P,i}]_{n \times 1} - inv([A]_{n \times n}) \cdot [B_i]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.40})$$

Bu denklemdeki çarpımların tümünün matris çarpımı olduğu unutulmamalıdır. vektör fonksiyonlarının açık halleri, Denklem B.40'da yerine koyulduklarında Denklem B.41 elde edilir.

$$[P_i(t)]_{n \times 1} = [E_\lambda]_{n \times n} \cdot \left[\underbrace{C_{H,i}}_{f_{H,i}(P_{0,i})} \cdot f_i(\lambda_i, t) \right]_{n \times 1} + [E_\lambda]_{n \times n} \cdot \left[\underbrace{C_{P,i}}_{f_P([B_i]_{n \times 1})} \cdot f_i(\lambda_i, t) \right]_{n \times 1} - inv([A]_{n \times n}) \cdot [B_i]_{n \times 1} \quad (\text{Denklem B.41})$$

Denklem B.41, çözümünün ve vektörlerinin bir fonksiyonlarının toplamı olduğunu göstermekle birlikte, kullanım açısından Denklem B.2'deki biçim elde edilememiştir. Bu amaçla aşağıdaki anlatılan işlemler yapılarak Denklem B.2'deki biçim elde edilir.

- **Adım 1:** Özvektörlerden her birinin tüm elemanları, kendisi ile aynı indekse sahip olan sabiti ile çarpılır. (örneğin özdeğerine karşı gelen özvektörün el emanlarının tümü, sabiti ile çarpılır) ve elde edilen sütun vektörler indeks sırası ile yan yana dizilerek bir matris $()$ elde edilir (Denklem B.42). Özvektörlere aynı işlem; sabitleri ile de uygulanarak matrisi elde edilir (Denklem B.43).

$$[E_\lambda C_H]_{n \times n} = \begin{bmatrix} C_{H,1} \cdot v_{1,1} & C_{H,2} \cdot v_{1,2} & \cdots & C_{H,n-1} \cdot v_{1,n-1} & C_{H,n} \cdot v_{1,n} \\ C_{H,1} \cdot v_{2,1} & C_{H,2} \cdot v_{2,2} & \cdots & C_{H,n-1} \cdot v_{2,n-1} & C_{H,n} \cdot v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{H,1} \cdot v_{n-1,1} & C_{H,2} \cdot v_{n-1,2} & \cdots & C_{H,n-1} \cdot v_{n-1,n-1} & C_{H,n} \cdot v_{n-1,n} \\ C_{H,1} \cdot v_{n,1} & C_{H,2} \cdot v_{n,2} & \cdots & C_{H,n-1} \cdot v_{n,n-1} & C_{H,n} \cdot v_{n,n} \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem B.42})$$

$$[E_\lambda C_P]_{n \times n} = \begin{bmatrix} C_{P,1} \cdot v_{1,1} & C_{P,2} \cdot v_{1,2} & \cdots & C_{P,n-1} \cdot v_{1,n-1} & C_{P,n} \cdot v_{1,n} \\ C_{P,1} \cdot v_{2,1} & C_{P,2} \cdot v_{2,2} & \cdots & C_{P,n-1} \cdot v_{2,n-1} & C_{P,n} \cdot v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{P,1} \cdot v_{n-1,1} & C_{P,2} \cdot v_{n-1,2} & \cdots & C_{P,n-1} \cdot v_{n-1,n-1} & C_{P,n} \cdot v_{n-1,n} \\ C_{P,1} \cdot v_{n,1} & C_{P,2} \cdot v_{n,2} & \cdots & C_{P,n-1} \cdot v_{n,n-1} & C_{P,n} \cdot v_{n,n} \end{bmatrix} \quad (\text{Denklem B.43})$$

ve olduğuna göre; başlangıç koşulları vektörü ve dış etkenler vektörü bir küme olarak düşünüldüğünde yalnızca başlangıç koşullarının, matrisi ise yalnızca dış etkenlerin bir fonksiyonu olacaktır.

- **Adım 2:** Adım 1'de elde edilmiş olan matrisinin her sütunu sütun numarası ile aynı indeksteki sistem bileşeni için tanımlanmış olan başlangıç koşuluna $()$ bölünerek matrisi elde edilir (Denklem B.44). Aynı işlem ve dış etkenler $()$ ile yapılarak matrisi elde edilir (Denklem B.45).

$$\left[\frac{C_H}{P_0} E_\lambda \right]_{n \times n} = \begin{bmatrix} \frac{C_{H,1}}{P_{0,1}} \cdot v_{1,1} & \frac{C_{H,2}}{P_{0,2}} \cdot v_{1,2} & \cdots & \frac{C_{H,n-1}}{P_{0,n-1}} \cdot v_{1,n-1} & \frac{C_{H,n}}{P_{0,n}} \cdot v_{1,n} \\ \frac{C_{H,1}}{P_{0,1}} \cdot v_{2,1} & \frac{C_{H,2}}{P_{0,2}} \cdot v_{2,2} & \cdots & \frac{C_{H,n-1}}{P_{0,n-1}} \cdot v_{2,n-1} & \frac{C_{H,n}}{P_{0,n}} \cdot v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{C_{H,1}}{P_{0,1}} \cdot v_{n-1,1} & \frac{C_{H,2}}{P_{0,2}} \cdot v_{n-1,2} & \cdots & \frac{C_{H,n-1}}{P_{0,n-1}} \cdot v_{n-1,n-1} & \frac{C_{H,n}}{P_{0,n}} \cdot v_{n-1,n} \\ \frac{C_{H,1}}{P_{0,1}} \cdot v_{n,1} & \frac{C_{H,2}}{P_{0,2}} \cdot v_{n,2} & \cdots & \frac{C_{H,n-1}}{P_{0,n-1}} \cdot v_{n,n-1} & \frac{C_{H,n}}{P_{0,n}} \cdot v_{n,n} \end{bmatrix}$$

(Denklem B.44)

$$\left[\frac{C_H}{P_0} E_\lambda \right]_{n \times n} = \begin{bmatrix} \frac{C_{H,1}}{P_{0,1}} \cdot v_{1,1} & \frac{C_{H,2}}{P_{0,2}} \cdot v_{1,2} & \cdots & \frac{C_{H,n-1}}{P_{0,n-1}} \cdot v_{1,n-1} & \frac{C_{H,n}}{P_{0,n}} \cdot v_{1,n} \\ \frac{C_{H,1}}{P_{0,1}} \cdot v_{2,1} & \frac{C_{H,2}}{P_{0,2}} \cdot v_{2,2} & \cdots & \frac{C_{H,n-1}}{P_{0,n-1}} \cdot v_{2,n-1} & \frac{C_{H,n}}{P_{0,n}} \cdot v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{C_{H,1}}{P_{0,1}} \cdot v_{n-1,1} & \frac{C_{H,2}}{P_{0,2}} \cdot v_{n-1,2} & \cdots & \frac{C_{H,n-1}}{P_{0,n-1}} \cdot v_{n-1,n-1} & \frac{C_{H,n}}{P_{0,n}} \cdot v_{n-1,n} \\ \frac{C_{H,1}}{P_{0,1}} \cdot v_{n,1} & \frac{C_{H,2}}{P_{0,2}} \cdot v_{n,2} & \cdots & \frac{C_{H,n-1}}{P_{0,n-1}} \cdot v_{n,n-1} & \frac{C_{H,n}}{P_{0,n}} \cdot v_{n,n} \end{bmatrix}$$

(Denklem B.45)

Bu adımda elde edilen matrisler bağımsız değişkenin birer fonksiyonu değildir.

- **Adım 3:** matrisi oluşturulur (Denklem B.46).

$$[F_i(t)]_{n \times n} = \begin{bmatrix} f_1(\lambda_1, t) & f_2(\lambda_2, t) & \cdots & f_{n-1}(\lambda_{n-1}, t) & f_n(\lambda_n, t) \\ f_1(\lambda_1, t) & f_2(\lambda_2, t) & \cdots & f_{n-1}(\lambda_{n-1}, t) & f_n(\lambda_n, t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_1(\lambda_1, t) & f_2(\lambda_2, t) & \cdots & f_{n-1}(\lambda_{n-1}, t) & f_n(\lambda_n, t) \\ f_1(\lambda_1, t) & f_2(\lambda_2, t) & \cdots & f_{n-1}(\lambda_{n-1}, t) & f_n(\lambda_n, t) \end{bmatrix}$$

(Denklem B.46)

- **Adım 4:** Denklem B.1'in çözümü $[P_i t]_{n \times 1}$; $[P_{0,i}]_{n \times 1}$, $[B_i]_{n \times 1}$, $[C_H / P_0 E_\lambda]_{n \times n}$ $[C_P / B E_\lambda]_{n \times n}$ ve $[F_i t]_{n \times n}$ kullanılarak yazılır (Denklem B.47)

$$[P_i(t)]_{n \times 1} = \left(\left[\frac{C_H}{P_0} E_\lambda \right]_{n \times n} \circ [F_i(t)]_{n \times n} \right) \cdot [P_{0,i}]_{n \times 1} +$$

(Denklem B.47)

$$\left(\left[\frac{C_P}{B} E_\lambda \right]_{n \times n} \circ [F_i(t)]_{n \times n} \right) \cdot [B_i]_{n \times 1} - inv([A]_{n \times n}) \cdot [B_i]_{n \times 1}$$

Denklem B.47'deki ifadesi, sağındaki ve solundaki matrislerin eleman elemana çarpımları anlamında bir operatördür ve ilgili çarpım işlemi "Hadamard çarpımı" olarak tanımlanmıştır.

Matris çarpımının matris toplamı ile dağılma özelliği nedeniyle; Denklem B.47, Denklem B.48 elde edilecek şekilde düzenlenebilir.

$$[P_i(t)]_{n \times 1} = \left(\left[\frac{C_H}{P_0} E_\lambda \right]_{n \times n} \circ [F_i(t)]_{n \times n} \right) \cdot [P_{0,i}]_{n \times 1} +$$

$$\left(\left(\left[\frac{C_P}{B} E_\lambda \right]_{n \times n} \circ [F_i(t)]_{n \times n} \right) - inv([A]_{n \times n}) \right) \cdot [B_i]_{n \times 1}$$

(Denklem B.48)

ve sırasıyla Denklem B.49 ve Denklem B.50'deki gibi tanımlanıp

$$f_{BAS}(t) = \left[\frac{C_H}{P_0} E_\lambda \right]_{n \times n} \circ [F_i(t)]_{n \times n}$$

(Denklem B.49)

$$f_{DIŞ}(t) = \left(\left[\frac{C_P}{B} E_\lambda \right]_{n \times n} \circ [F_i(t)]_{n \times n} \right) - inv([A]_{n \times n})$$

(Denklem B.50)

sağ tarafları Denklem B.48'de yerlerine koyulunca, Denklem B.51 elde edilir.

$$[P_i(t)]_{n \times 1} = f_{BAS}(t) \cdot [P_{0,i}]_{n \times 1} + f_{DIŞ}(t) \cdot [B_i]_{n \times 1}$$

(Denklem B.51)

Denklem B.51'nin; Denklem B.2 ile aynı olduğu görülmektedir.

B.2 Fonksiyonlarının Elde Edilmesi

fonksiyonları; özdeğerlere bağlıdır. Bu fonksiyonlar standart yüksek matematik kitaplarında aşağıdaki gibi verilemektedir:

- Gerçek ve tekrarlı (çok katlı) olmayan özdeğerler λ_i için Denklem B.52 ile verilmektedir.

$$f_{RDE,i}(\lambda_i, t) = \exp(\lambda_i \cdot t)$$

(Denklem B.52)

Bu durumda, eğer n_1 adet gerçek ve tekrarlı (çok katlı) olmayan özdeğer varsa, n_1 adet fonksiyonu olacaktır.

- Gerçek ve tekrarlı (çok katlı köke bağlı) özdeğerler λ_i için, tekrar indeksi olmak üzere tekrar sayısı λ_i kadar fonksiyonu (Denklem B.53) olacak ve bu fonksiyonu olacak ve bu fonksiyonlar toplanacaktır (Denklem B.54). n_2 tekrarlanan gerçek özdeğerlerin sayısıdır.

$$f_{RRE,jk}(\lambda_{RR,j}, t) = t^{k_j-1} \cdot \exp(\lambda_{RR,j} \cdot t) \quad (\text{Denklem B.53})$$

$$\begin{aligned} f_{RRE,1}(\lambda_{RR,1}, t) &= \left(\sum_{k_1=1}^{ks_1} t^{k_1-1} \right) \cdot \exp(\lambda_{RR,1} \cdot t) \\ f_{RRE,2}(\lambda_{RR,2}, t) &= \left(\sum_{k_2=1}^{ks_2} t^{k_2-1} \right) \cdot \exp(\lambda_{RR,2} \cdot t) \\ &\vdots \\ f_{RRE,j}(\lambda_{RR,j}, t) &= \left(\sum_{k_j=1}^{ks_j} t^{k_j-1} \right) \cdot \exp(\lambda_{RR,j} \cdot t) \\ &\vdots \\ f_{RRE,n_2}(\lambda_{RR,n_2}, t) &= \left(\sum_{k_{n_2}=1}^{ks_{n_2}} t^{k_{n_2}-1} \right) \cdot \exp(\lambda_{RR,n_2} \cdot t) \end{aligned} \quad (\text{Denklem B.54})$$

- İki karmaşık eşlenik özdeğer olması (ve) durumunda ise, iki fonksiyon (ve) elde edilecektir. n_3 tekrarlanmayan karmaşık özdeğerlerin sayısıdır.

$$f_{CCP,1,m}(\alpha_m, \beta_m, t) = \exp(\alpha_m \cdot t) \cdot \cos(\beta_m \cdot t) - \exp(\alpha_m \cdot t) \cdot \sin(\beta_m \cdot t) \quad (\text{Denklem B.55})$$

$$f_{CCP,2,m}(\alpha_m, \beta_m, t) = \exp(\alpha_m \cdot t) \cdot \cos(\beta_m \cdot t) + \exp(\alpha_m \cdot t) \cdot \sin(\beta_m \cdot t) \quad (\text{Denklem B.56})$$

- İki karmaşık eşlenik tekrarlı özdeğer olması (and) durumunda ise, tekrar indeksi olmak üzere her biri tekrar sayısı () kadar fonksiyon içeren ve biçimleri (Denklem B.57 ve Denklem B.58'de verilen) iki fonksiyon grubu elde edilecek ve bu fonksiyonlar toplanacaktır (Denklem B.59 ve Denklem B.60). n_4 tekrarlanan eşlenik karmaşık özdeğer sayısıdır.

$$\begin{aligned} f_{RCCE,1,p}(\alpha_{R,p}, \beta_{R,p}, t) &= \\ &t^{s_p-1} \cdot \left(\exp(\alpha_{R,p} \cdot t) \cdot \cos(\beta_{R,p} \cdot t) - \exp(\alpha_{R,p} \cdot t) \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin(\beta_{R,p} \cdot t) \right) \end{aligned} \quad (\text{Denklem B.57})$$

$$\begin{aligned} f_{RCCE,2,p}(\alpha_{R,p}, \beta_{R,p}, t) &= \\ &t^{s_p-1} \cdot \left(\exp(\alpha_{R,p} \cdot t) \cdot \cos(\beta_{R,p} \cdot t) + \exp(\alpha_{R,p} \cdot t) \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin(\beta_{R,p} \cdot t) \right) \end{aligned} \quad (\text{Denklem B.58})$$

$$\begin{aligned}
f_{RCCE,1,1}(\alpha_{R,1}, \beta_{R,1}, t) &= \left(\sum_{s_1=1}^{kcc_1} t^{s_1-1} \right) \cdot \left(\exp(\alpha_{R,1} \cdot t) \cdot \cos(\beta_{R,1} \cdot t) - \exp(\alpha_{R,1} \cdot t) \cdot \sin(\beta_{R,1} \cdot t) \right) \\
f_{RCCE,1,2}(\alpha_{R,2}, \beta_{R,2}, t) &= \left(\sum_{s_2=1}^{kcc_2} t^{s_2-1} \right) \cdot \left(\exp(\alpha_{R,2} \cdot t) \cdot \cos(\beta_{R,2} \cdot t) - \exp(\alpha_{R,2} \cdot t) \cdot \sin(\beta_{R,2} \cdot t) \right) \\
&\vdots \\
f_{RCCE,1,p}(\alpha_{R,p}, \beta_{R,p}, t) &= \left(\sum_{s_p=1}^{kcc_s} t^{s_p-1} \right) \cdot \left(\exp(\alpha_{R,p} \cdot t) \cdot \cos(\beta_{R,p} \cdot t) - \exp(\alpha_{R,p} \cdot t) \cdot \sin(\beta_{R,p} \cdot t) \right) \\
&\vdots \\
f_{RCCE,1,n_4}(\alpha_{R,n_4}, \beta_{R,n_4}, t) &= \left(\sum_{s_{n_4}=1}^{kcc_{n_4}} t^{s_{n_4}-1} \right) \cdot \left(\exp(\alpha_{R,n_4} \cdot t) \cdot \cos(\beta_{R,n_4} \cdot t) - \exp(\alpha_{R,n_4} \cdot t) \cdot \sin(\beta_{R,n_4} \cdot t) \right)
\end{aligned}$$

(Denklem B.59)

$$\begin{aligned}
f_{RCCE,1,1}(\alpha_{R,1}, \beta_{R,1}, t) &= \left(\sum_{s_1=1}^{kcc_1} t^{s_1-1} \right) \cdot \left(\exp(\alpha_{R,1} \cdot t) \cdot \cos(\beta_{R,1} \cdot t) + \exp(\alpha_{R,1} \cdot t) \cdot \sin(\beta_{R,1} \cdot t) \right) \\
f_{RCCE,1,2}(\alpha_{R,2}, \beta_{R,2}, t) &= \left(\sum_{s_2=1}^{kcc_2} t^{s_2-1} \right) \cdot \left(\exp(\alpha_{R,2} \cdot t) \cdot \cos(\beta_{R,2} \cdot t) + \exp(\alpha_{R,2} \cdot t) \cdot \sin(\beta_{R,2} \cdot t) \right) \\
&\vdots \\
f_{RCCE,1,p}(\alpha_{R,p}, \beta_{R,p}, t) &= \left(\sum_{s_p=1}^{kcc_s} t^{s_p-1} \right) \cdot \left(\exp(\alpha_{R,p} \cdot t) \cdot \cos(\beta_{R,p} \cdot t) + \exp(\alpha_{R,p} \cdot t) \cdot \sin(\beta_{R,p} \cdot t) \right) \\
&\vdots \\
f_{RCCE,1,n_4}(\alpha_{R,n_4}, \beta_{R,n_4}, t) &= \left(\sum_{s_{n_4}=1}^{kcc_{n_4}} t^{s_{n_4}-1} \right) \cdot \left(\exp(\alpha_{R,n_4} \cdot t) \cdot \cos(\beta_{R,n_4} \cdot t) + \exp(\alpha_{R,n_4} \cdot t) \cdot \sin(\beta_{R,n_4} \cdot t) \right)
\end{aligned}$$

(Denklem B.60)

Tüm özdeğerler dikkate alındıklarında Denklem B.61 geçerlidir.

$$n = n_1 + \sum_{j=1}^{n_2} ks_j + (2 \cdot n_3) + 2 \cdot \sum_{p=1}^{n_4} kcc_p \quad (\text{Denklem B.61})$$

Yazar Hakkında / About Author

Prof. Dr. Ali ERTÜRK | İstanbul Üniversitesi |
erturkali[at]istanbul.edu.tr | ORCID: 0000-0002-3532-2961

Ali Ertürk, 2000 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, Çevre Mühendisliği Programı'ndan mezun olmuştur. 2002 yılında aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü, Çevre Mühendisliği Programı'ndan yüksek lisansını tamamlamıştır. 2005 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Kimya Programını bitirerek ikinci lisans derecesini almıştır. 2008 yılında Klaipeda Üniversitesi'nde Ekoloji ve Çevre Bilimleri dalında yaşam bilimleri ana grubu altında doktorasını tamamlamıştır. 2012 yılında Çevre Bilimleri ve Mühendisliği'nden Doçent unvanını almıştır. 2022 yılında Anadolu Üniversitesi İktisat Fakültesi Uzaktan Öğrenim İktisat programından mezun olarak üçüncü lisans derecesini almıştır. 2001-2009 yılları arasında İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi Çevre Mühendisliği Bölümünde araştırma görevlisi, 2009 – 2014 yılları arasında aynı bölümde öğretim üyesi, 2014 yılından günümüze kadar ise İstanbul Üniversitesi Su Ürünleri ve Su Bilimleri fakültelerinde öğretim üyesi olarak görev yapmıştır. Çalışma alanları su kirlenmesi kontrolü, havza yönetimi, ekosistem modelleme ve teorik ekolojidir.

Prof. Dr. Ali ERTÜRK | İstanbul University |
erturkali[at]istanbul.edu.tr | ORCID: 0000-0002-3532-2961

Ali Ertürk graduated from Istanbul Technical University, Faculty of Civil Engineering, Environmental Engineering Program in 2000. In 2002, he received his master's degree from the Institute of Science, Environmental Engineering Program of the same university. In 2005, he graduated from Istanbul Technical University, Faculty of Arts and Sciences, Chemistry Program and received his second bachelor's degree. In 2008, he completed his Ph.D. in Ecology and Environmental Sciences at the University of Klaipeda under the main group of life sciences. In 2012, he received the title of Associate Professor in Environmental Sciences and Engineering. In 2022, he graduated from Anadolu University, Faculty of Economics, Distance Learning Economics program and received his third bachelor's degree. He worked as a research assistant at Istanbul Technical University, Faculty of Civil Engineering, Department of Environmental Engineering between 2001-2009, as a faculty member at the same department between 2009-2014, and as a faculty member at Istanbul University, Faculty of Fisheries and Aquatic Sciences since 2014. His research interests include water pollution control, watershed management, ecosystem modeling, and theoretical ecology.